

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 17 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400405

研究課題名(和文)ハミルトン力学系における動的境界と量子効果に関する研究

研究課題名(英文)Dynamical barriers and quantum effects in Hamiltonian systems

研究代表者

首藤 啓 (Akira, Shudo)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：60206258

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：混合位相空間をもつハミルトン力学系の古典および量子論を調べ以下を明らかにした。(1)階層的安定構造をもつ、ある2次元区分線型写像がその位相空間に安定島構造を無限個もつことを厳密に証明した。(2)複素安定多様体・不安定多様体上にある複素軌道の動力学を数値的に調べ、数学者が予想した、複素空間上でのエルゴード性が実際に成り立っていることを示唆する数値計算結果を得た。このことを基に、両生固有状態の半古典論的解釈を与えた。(3)量子エノン写像のストークス幾何学、特に、馬蹄型条件を満たす場合についての検討を行い、ストークス幾何学の大局的性質を反映した非自明な半古典階の相殺が発生することを見出した。

研究成果の概要(英文)：We studied classical and quantum dynamics in mixed Hamiltonian systems and obtained the following results: (1) we have rigorously proved the existence of infinity many stability islands for a certain piecewise linear map with hierarchical phase space by introducing a proper symbolic dynamics. (2) we have numerically observed the stable and unstable manifolds for the complex Henon map and found that the orbits are ergodic even though the dynamics in the real plane has mixed phase space, which serves as a semiclassical interpretation for the so-called amphibious eigenfunctions. (3) we have analyzed the Stokes geometry of quantum Henon map satisfying the horseshoe condition based on recent progress of the exact WKB analysis, and found that nontrivial cancellation of saddle points solutions takes places, reflecting the global nature of Stokes geometry.

研究分野：非線形物理

 キーワード：量子カオス  
 ークス現象 ハミルトン系 混合位相空間 遅い緩和 複素力学系 両生固有状態 完全WKB解析 スト

### 1. 研究開始当初の背景

現実の物理過程に広く現れる、最も一般的なハミルトン力学系は、完全可積分、理想カオス、そのいずれでもなく、ひとつの位相空間に、可積分軌道、カオス軌道などが共存・混在する「混合系」である。その位相空間は「混合位相空間」と呼ばれ、その中には運動の形態を異にする様々な不変集合が棲み分けることが知られている。

混合位相空間をもつハミルトン力学系については、古典ならびに量子論ともに、過去30年ほどの間に多くの研究が行われ、数学および物理の問題として一定の成果を収めてきた。とくに、混合位相空間の動的障壁が隔てる各不変集合内での動力学については主として数値的なアプローチによって知見が蓄積されたことは多くの人々が知るところである。しかしながら、動的障壁の近傍のダイナミクス、もしくは動的障壁を跨ぐ動力学、といった観点での研究は混合位相空間固有の興味深い観点であるにもかかわらず、依然として多くの問題が曖昧なまま残されている。本研究はそのような背景のもと、混合位相空間における動的障壁の新しい側面と、動的障壁に隔てられた異なる不変集合の間における「異なる量子局在の相互作用」という観点を中心に研究が進められた。

### 2. 研究の目的

(1) ハミルトン動力学に現れる、いわゆる「遅い緩和」は、可積分・カオス領域の境界に現れる複雑な動力学にその起源をもつ。従って、その構造と動力学を支配する普遍性を明らかにすることは、階層的タイムスケールが古典動力学から発生する根幹の原理を探ることに等しい。ここでは、近年、その存在が厳密に証明された「単純境界をもつ混合系」を取り上げ、境界近傍で発生する遅い運動の起源を解析的な方法により明らかにする。

(2) 力学系を複素領域に拡張し、拡張された混合位相空間における動的境界を調べる。特に、KAM トーラスの自然境界（解析性が崩壊する境界）は、実位相空間に現れる動的境界理解のために必須であるばかりでなく、混合系の量子動力学を理解する鍵となる。

(3) 近年発見された「両生固有状態」と呼ばれる、量子古典対応を無視したかのように振る舞う、新種の量子波動関数に関する解析を行う。量子カオスの研究を通じてさまざまな種類の量子局在現象が発見され、個別の発現機構について多くの研究がなされてきた。それに対して、両生固有状態の研究は、ひとつの混合位相空間に共存する異種量子局在が相互にいかに関わるか？を問うものである。

(4) 混合系の量子動力学を解析するための手段として、非可積分系における完全 WKB 理論を開発・発展させる。また、それを用いた多自由度系、さらには混合系固有の純量子論的效果の発生機構解明を行う。特に、混合量子系の解析に完全 WKB 解析を導入すること

により、厳密レベルで混合位相空間に固有な純量子効果を調べる。さらに、ストークス幾何学の分岐理論を確立し、異種量子局在間の関連の問題にアプローチの理論的土台をつくる。また、「多準位の非断熱遷移の問題」という、長年の未解決問題にも挑む。

### 3. 研究の方法

(1) 近年見出された、可積分・カオス領域間の境界が単純な形状をした混合系について厳密な解析を進める。まず、単一の安定領域のみが現れる単純混合系を取り上げ、次に、自己相似構造をもつ混合位相空間をもつ系を調べる。記号力学系の導入により、単純混合系の解析を進める。

(2) 複素領域に拡張した動力学と、複素面に現れる KAM トーラスの自然境界の関係を直接数値計算により明らかにする。多次元複素力学系の最近の知見によると、実位相空間が混合的（規則領域とカオス領域とが混在する）である場合であっても、力学系を複素に拡張することにより系が常にエルゴード的であることが示唆されている。この事実を数値的に確認し、複素領域での混合系の動力学の特性を明らかにする。

(3) 既に我々は、系が多次元になると両生固有状態が一般的に現れることを示したが、ここでは、両生固有状態と対応原理との整合性と齟齬について詳しい検討を行う。具体的な手法としては、古典力学と量子力学の橋渡しとして最も蓄積のある半古典理論を用いる。特に、相互不可侵な古典領域間の遷移を記述するためには、半古典論を複素領域に拡張した複素半古典論を用いる必要がある。

(4) 完全 WKB 解析の最も重要な要素である「ストークス幾何学」を、混合位相空間をもつ2次元写像系について具体的に調べ上げ、ストークス幾何学の分岐理論構築を目指す。具体的な解析は、エノン写像と呼ばれる、最も単純かつ非自明な多項式自己同型写像に対して行う。

### 4. 研究成果

(1) 位相空間に階層的安定構造をもつ2次元区分線型写像に、記号力学系を導入することにより、安定島構造の性質を詳細に調べ、それらが無限個存在することを厳密に証明した。混合系において、一般に、安定構造が無限個存在することは、これまで多くの人々の予想するところであったが、実際に正の測度をもって位相空間中に無限個存在することが厳密に証明されたのは、我々の知るところ初めてである。導入した記号力学系に対する詳細な観察をもとに、安定島構造が正の測度をもって無限の深さまで存在し続ける記号列の系列を予想し、系の区分線型性を用いることにその予想を証明した。また、近可積分系に広く見られる遅い運動の起源を、位相空間に階層的島構造をもつ2次元区分線型写像を用いて探った。特に、個々の規則領域近傍

での長時間滞在のみならず、それらが階層構造を成し自己相似状に配置されていることが運動をさらに遅いものとしていることが予想されてきたが、その妥当性を確認することがここでの一つの大きな目的であった。位相空間に適当な分割を考え記号力学系を導入することにより島構造の系統的な分類を行い、再帰時間分布などに対する階層構造の寄与を詳しく調べた結果、この系では階層構造に由来する運動の律速は起こらないことが明らかになった。

(2) 混合位相空間をもつ2次元写像のKAM曲線の自然境界と、複素安定多様体・不安定多様体との関係を調べた。また、自然境界が、混合系の固有関数のトンネルテールに顕在化しているか否かについての詳細な計算を行った。われわれは、当初、自然境界の発生源を実面に射影した場所から波動関数のトンネル確率の異常増大が発生することを主張したが、詳細な計算を進めた結果、より慎重な検討が必要であることがわかってきた。

(3) 複素エノン写像における複素安定多様体・不安定多様体上にある複素軌道の動力学を数値的に調べた。その結果、Bedford-Smillieらが予想した、複素空間上でのエルゴード性が実際に成り立っていることを強く示唆する数値計算結果を得た。このことは、複素の動力学により、軌道が位相空間中いかなる領域にも到達する可能性があることを意味し、両生固有状態発生の背景に、規則領域(KAM領域)とカオス領域とを結び指数関数的に多くの軌道が関与していることが明らかになった。また、実動力学で隔てられ、異なる不変集合に局在しているかのごとく見える固有状態も、実は、波動関数の裾で強く結合していることも強く示唆している。

(4) エノン写像の量子プロパゲータに対するストークス幾何学、特に、系が馬蹄型条件を満たす場合についてのストークス幾何学の検討を行い、「トンネル解」がストークス幾何学の大域的性質を反映し非自明な相殺を起こすことがわかった。さらに、その詳しい機構を解析し、写像回数無限大でのトンネル解の個数に対する詳しい漸近評価を得た。また、多準位の非断熱遷移の問題を完全WKB解析の観点から考察した。特に、多準位系になってはじめて現れる「新しいストークス線」を見かけ上考慮する必要のない、最も単純な状況における完全WKB解析の数値的検証を行った。透熱極限のエネルギー準位が時間に対して線型に変化する場合についての完全WKB解析の有効性は既に検証済みであるが、ここでは、透熱極限のエネルギー準位が時間に対して非線型的な依存性をもつ場合について調べた。その結果、そのようなより一般の場合についても、完全WKB解析の結果は、極めて高い精度で厳密な非断熱遷移過程の計算を予言することが確認された。

さらに以下のような結果も本研究課題を進めていく中で明かにされた。

(5) 非可積分系において見られるトンネル確率の異常増大の発生機構、およびその起源を調べた。非可積分系におけるトンネル確率の異常増大は、その現象の存在が指摘されてから既に20年以上が経ち、さまざまな系での実験的検証も試みられている。そのような中であって、実は「なぜ非可積分系ではトンネル確率の異常増大が起こるのか?」という最も基本的な問いが未解決なままにあった。ここでは、繰り込み可積分系の方法を用いることにより、その発生機構を初めて明らかにするとともに、従来の理論の問題点と限界を指摘した。

(6) 上記研究の中で明らかになった事実として、作用表示行列要素の(最低次)半古典近似の困難がある。作用表示行列要素は、半古典論を展開する際の基本であるが、その中に、従来の古典力学を基にした半古典解析が適用不能な、純量子論的過程(広い意味の回折効果)が内在されていることが明らかになった。カオスという現象が古典力学上でしか定義し得ない以上、カオスがいかに量子現象に顕在化するか、という問いに答えるためには、古典力学に依拠した解析、いわゆる半古典理論に頼らざるを得ないことを考えると、行列要素に半古典論の破綻が起きている事実は驚きであり、その理解に向けての詳細な解析が今後強く望まれる。

(7) 完全可積分系、とくに、多項式標準ハミルトン系のトンネル効果を、複素半古典論にもとに調べた。ここでは、多項式標準ハミルトン系の解のリーマン面の基本群を調べることにより、複素半古典論に寄与する可能性のある複素軌道の数が高々有限であることを示した。複素半古典論の計算に寄与する複素軌道は、最終的には、経路積分を鞍点近似する際に現れるストークス現象を考慮することによって決定されるため、多項式標準ハミルトン系の完全WKB解析を実行することが今後取り組むべき重要な課題として浮上してきた。また、古典的には分断された領域(例えば、二重井戸ポテンシャル問題の2つの井戸)に対する古典量子化条件を調べた。その結果、それぞれの井戸に対する古典量子化条件は独立に与えられるものではなく、古典軌道のリーマン面の無限遠点の留数が関係する非自明な関係式によって結ばれていることを明かにした。二重井戸に関する結果については、すでにLeboeufらが異なる方法を経由して得た結果と同じものであるが、ここでは、より一般の多重井戸ポテンシャル系、さらには、多項式標準ハミルトン系に関しても同様の関係式が成立することを示した。

## 5 . 主な発表論文等

[ 雑誌論文 ] ( 計 15 件 )

A. Shudo and K. S. Ikeda, Toward Pruning Theory of the Stokes Geometry for the Quantum Henon Map, Nonlinearity, 査読有, 29 (2016) 375 (51 pages)

doi:10.1088/0951-7715/29/2/375

A. Shudo, Y. Hanada and K. S. Ikeda, Quantum tunneling in nonintegrable systems: beyond the leading order semiclassical description, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B57 (2016) 27-38 (12 pages)

Y. Hanada, A. Shudo and K. S. Ikeda, Origin of the enhancement of tunneling probability in the nearly integrable system, Phys. Rev. E, 査読有, 91 (2015) 042913 (16 pages)

doi:10.1103/PhysRevE.91.042913

A. Shudo and R. Ohashi, Numerical verification of the exact WKB formula for the generalized Landau-Zener-Stueckelberg problem, Special Issue on ASTE, 査読有, B11 (2015) 75 - 80 (6 pages)

Y. Hanada, A. Shudo and K. S. Ikeda, Resonance-assisted tunneling in integrable and nonintegrable systems, 査読有, Special Issue on ASTE, B11 (2015) 127-130 (4 pages)

H. Harada and A. Shudo, Non-linear resonances and singularity structures of complex classical dynamics, 査読有, Special Issue on ASTE, B11 (2015) 131-134 (4 pages)

A. Shudo, Y. Hanada, T. Okushima and K. S. Ikeda, Instanton-noninstanton transition in nonintegrable tunneling processes: A renormalized perturbation approach, Europhys. Lett., 査読有, 108 (2014) 50004 (6 pages)

doi:10.1209/0295-5075/108/50004

A. Shudo, The Stokes geometry of the quantum Henon map in the horseshoe regime, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B52 (2014) 263-282 (20 pages)

N. Mertig, S. Löck, A. Bäcker, R. Ketzmerick and A. Shudo, Complex paths for regular-to-chaotic tunnelling rates, Europhys. Lett., 査読有, 102 (2013) 10005 (6 pages)

doi:10.1209/0295-5075/102/10005

[ 学会発表 ] ( 計 55 件 )

A. Shudo, Infinitely many stability islands and sticky dynamics in a piecewise linear map, 第6回「ハミルトン力学系とその周辺」研究集会 ~ --- KAM 理論に関する L.H. Eliasson 教授連続講演とワークショップ ---

2017 3, 京都大学

A. Shudo, Toward pruning theory for the Stokes geometry of the quantum Henon map "Quantum Chaos, Graphs and Nodal Domains" 2016 9, Rehovot, Israel

A. Shudo, Amphibious Complex Orbits and Dynamical Tunneling

PHHQ16: "Progress in Quantum Physics with Non-Hermitian Operator", 2016 8, Yukawa Institute, Kyoto

首藤 啓, Toward pruning theory for the Stokes geometry of the quantum Henon map 数理解析研究所研究会 『力学系とその関連分野の連携探索』 2016 6, 京都大学

A. Shudo, Anomalous behavior of transition matrix elements in nonintegrable quantum maps "Exponential Asymptotics of Difference and Differential Equations"

2016 6, RIMS, Kyoto

A. Shudo, Anomalous behavior of transition matrix elements in nonintegrable quantum maps

"Exponential Asymptotics of Difference and Differential Equations", 2016 6, RIMS, Kyoto

A. Shudo, The existence of infinitely many stability islands and sticky dynamics in a piecewise linear map

The 14th Christmas symposium of Physicists, 2015 12, Maribor, Slovenia

首藤 啓, 非可積分系のトンネル効果 数学協働プログラム、平成 27 年度ワークショップ 『大自由度分子系における化学反応機序の理解と制御』 2015 10, 北海道大学

A. Shudo, The existence of infinitely many stability islands and sticky dynamics in a piecewise linear map

"International Workshop on Ray Scattering Wave Mechanics in 2D Microcavity and Related Systems", 2015 7, Korea

首藤 啓, Quantum tunneling in nonintegrable systems: beyond the leading order semiclassical description

数理解析研究所研究会 『計算機を援用した完全 WKB 解析の研究 --- 仮想的変わり点の周辺を中心として ---』 2015 6, 京都大学

A. Shudo, Nonadiabatic transition in multilevels and the exact WKB method

"Dynamics Days Central Asia", 2015 5, Khiva, Uzbekistan

A. Shudo, Quantum tunneling in nonintegrable systems: beyond the leading order semiclassical description

"Quantum chaos: fundamentals and applications", 2015 3, Luchon, France

A. Shudo, Introduction to the exact WKB method

" New challenges in complex system science" ,2014 10, Waseda University

A.Shudo, Quantum tunneling in nonintegrable systems: beyond the leading order WKB description

" Several aspects of microlocal analysis" ,2014 10, RIMS, Kyoto

首藤 啓, ハミルトン系における遅い緩和現象について

「ソフトな物理工学の未来を考える会」2014 7, 湘南国際村

A. Shudo, Renormalized perturbative analysis of mixed quantum systems and dynamically induced diffraction

" Let's face chaos through nonlinear dynamics" ,2014 7, Maribor, Slovenia

首藤 啓, KAM 曲線の自然境界と動的回折効果について

「第 5 回ハミルトン系とその周辺(伊藤秀一先生還暦記念研究集会)」,2014 5, 金沢大学

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.comp.tmu.ac.jp/nonlinear/ja/index.html>

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

首藤 啓(SHUDO AKIRA)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：60206258

### (2)連携研究者

田中 篤司(TANAKA ATUSHI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・助教  
研究者番号：20323264