

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 10 日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400407

研究課題名(和文)多電子系における強磁性の数理物理学的研究

研究課題名(英文)Mathematical Physical Study of Ferromagnetism in Many-Electron Systems

## 研究代表者

田崎 晴明 (Tasaki, Hal)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：50207015

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：強く相互作用する量子多体系において非自明な秩序や相構造を解明すること、既存の方法を応用するだけでなく物理的視点に基づいた新たな数理的手法を開拓することを目指して研究を進めた。特に「単一のバンド内の電子が強く反発し合うことで強磁性が出現する」という物理的にもっとも自然な状況を反映したハバード模型で金属強磁性の発現を厳密に証明したことは特筆すべき成果である。この研究では数理的にも新しい証明方法を提案した。他に、ギャップのない多バンドハバード模型での強磁性、いくつかの強相関電子系でのマヨラナ端状態、平坦バンドのあるボース・ハバード模型での朝永・ラッティンジャー液体などについて成果を挙げた。

研究成果の概要(英文)：The aim of the project had been to elucidate nontrivial orders and phase structures which emerge in strongly interacting many-body quantum systems, and, at the same time, to develop novel mathematical methods based on physical pictures and points of view. The most important achievement was a theorem which established the emergence of metallic ferromagnetism in the Hubbard type model which represents physically natural situation that "strong repulsion between electrons in a single band leads to ferromagnetic order". Notably a new mathematical method, especially suited for the study of metallic ferromagnetism, had been developed in this study. There was also progress in the researches of ferromagnetism in a gapless multi-band Hubbard model, the emergence of Majorana edge states in some strongly interacting electron systems, and the Tomonaga-Luttinger liquid in the Bose-Hubbard models with flat-bands.

研究分野：統計物理学

キーワード：数理物理、量子多体系、強相関電子系、ハバード模型、金属強磁性、マヨラナ端状態、朝永・ラッティンジャー液体

## 1. 研究開始当初の背景

強く相互作用する量子多体系 — つまり、量子力学に従うきわめて多くの粒子が互いに強く影響を及ぼし合いながら運動するような系 — のふるまいを理解することは、現代の物理学の重要な課題の一つである。特に、固体物理学では、基礎的な物性の理解から新奇物質の探索まで、様々なテーマが強相関電子系と関わっている。近年になって急激に進展している冷却原子集団系の問題も相互作用する量子多体系の重要な例である。より基礎的な立場からは、平衡状態への緩和現象など統計力学の基礎に関わる研究においても、強く相互作用する量子多体系の動力学に着目することで重要な知見が得られることが認識され、活発な研究が進められている。

強く相互作用する量子多体系の研究の歴史は長く多くの知見が得られている。しかし、一方で、ごく基本的な現象が十分に理解されていないということも珍しくない。強磁性体、つまり「磁石」は、好例であろう。

強磁性とは物質中の多数のスピンが互いの向きをそろえてマクロな磁気モーメントを生み出す協力現象である。スピンのそろった根本的な原因は、フェルミオンである電子の多体量子効果と、電子間に働く強いクーロン相互作用であることがわかっている。この事実を 1920 年代に指摘したのは量子力学の創始者の一人であるハイゼンベルクである。しかし、相互作用の強い多電子系において、ハイゼンベルクが言うようなメカニズムで強磁性が生じることを示すのは容易なことではなかった。ハバード模型という理想化されたモデルの範囲内においては、1990 年代以降に大きく理解が進展し、強磁性を示す厳密な例がいくつか得られた。ただし、これらの結果は絶縁性の強磁性体に限られており、同じ電子の集団が強磁性と伝導性の双方に寄与する「金属強磁性」の理解はきわめて貧弱なままだった。

## 2. 研究の目的

われわれは、数理物理学および基礎物理学の立場から、強く相互作用する量子多体系における非自明な秩序や相構造を理解することを目指して研究を進めた。その際、既存の手法を拡張・応用するだけでなく、物理現象についての描像や直観に基づいて新たな数理的な手法を考案・開拓し、将来的により広い範囲の問題を扱う土壌を培うことも意識した。

具体的な研究の題材としては、近年注目を集めているトポロジカルな秩序を示す電子系、冷却原子集団のモデルであるボース・ハバード模型など様々なものを想定していたが、一つ、計画の核に据えたのは上述した金属強磁性の理解という古典的な難問である。ハバード模型における金属強磁性の発現については、メンバーである田中と田崎が 2007 年に強い結果を発表しているが、その

後の進展はほとんどなかった。特に、以前の結果では強磁性を担う電子が二つのバンドを占有しており、物理的には、絶縁性の強磁性体とそれほど変わらないメカニズムで強磁性が生じていると見ることもできた。そこで、今回の一つの重要な目標は、この不満点を克服し、物理的により自然な設定のモデルで金属強磁性の出現を示すことだった。また、やや技術的になるが、それまでのハバード模型での強磁性の厳密な例ではいずれも、すべてのスピンの完全なそろった「完全強磁性」だけが示されていたが、(より現実的な)一部のスピンだけがそろっている「不完全強磁性」の存在を示すことも大きな目標と考えた。そのためにはまったく新しい証明の手法が必要だろうと認識していた。

さらに — これは一種の「理論家の夢」と言ってもいいと思うが — 強束縛近似の格子モデルを離れ、連続空間の電子系のモデルで強磁性などの非自明な秩序に関して何らかの厳密な結果を示すことも大目標として掲げていた(ただし、この方向での結果は部分的で、報告書で述べるレベルの成果は得られなかった)。

## 3. 研究の方法

### (1) 研究体制

田崎、田中、桂の三名のあいだでの議論や意思疎通はきわめてスムーズだった。基本的には三人が独立に研究や考察を進め、必要に応じて議論を重ねることで研究を進めた。ただ、三人が実際に会って議論をする機会は多くはとれなかったため、今回はネット上で提供されているビジネス・チャットのシステムである Slack を利用した情報交換、議論、共同研究、論文の共同執筆を試みた。結果として、これは成功であり、電子メールによる意見交換よりもはるかに効率的に共同研究が進められた。

また、新たな多彩な問題について考察するためには、基礎物理学研究所での研究会をはじめとする内外の研究会、物理学会などに参加し、幅広い分野の多くの研究者と活発に交流して議論し知見を広めることもきわめて重要な役割を果たした。

### (2) 研究の進め方

数理物理学の研究の場合、計画を決めてそれに従って研究を進める、というやり方が必ずしもうまくいくとは限らない。基本的には、注目すべき先行研究を教え合いそれらについて議論する、あるいは、メンバーのいずれかが提唱したアイデアについて議論しその先の方向性を考えるといったことをおこないながら、各メンバーが独自に研究の着想を練り、結果がある程度固まったところで議論を重ねるといったスタイルを進めた。上述のように Slack による議論の体制を整えたので、一人が新しいモデルを提唱すると別のメンバーが素早く数値計算をしてその

結果を共有するといったやり取りもスムーズに進んだ。

特にハバード模型における金属強磁性の問題では、以前に田中と田崎が物理学会で発表した予備的な結果を新たに吟味した結果、田中がまったく新しい着想を示し、それを中心に三人で議論を進めて新しい証明法を開拓することができた。

#### 4. 研究成果

##### (1) ハバード模型での自然な金属強磁性

ある種のハバード模型において基底状態で金属強磁性が発現することを厳密に証明した。電子が二つのバンドを占める 2007 年のモデルとは異なり、このモデルの基底状態では電子は単一のバンドを占めている。金属強磁性の物理を考える上で、はるかに自然であり、望ましいモデルに近づいたと言える。一方で、伝導を担うホールの密度に制約があり、残念ながら、熱力学的極限ではホール密度がゼロになる場合しか扱えていない。そういう意味では、この研究も金属強磁性の理解という難問に向けての一步に過ぎない。

技術的な側面では、「厳密な基底状態を構築せずに基底状態での強磁性の存在を証明する」というまったく新しい方法を導入した。これは、不完全強磁性の存在証明等を含んだ新たな展開のための重要な布石になりうると期待している。

##### (2) ギャップのない多バンドハバード模型での強磁性

ミルケ・モデルと呼ばれる平坦バンドをもつ多バンドのハバード模型に摂動を加えることで、バンドは分散を持つがバンドギャップのないハバード模型が得られる。このようなモデルにおいて基底状態が強磁性を示すことを証明した。この場合の強磁性状態は絶縁体に相当すると考えられるが、ギャップがないという点で、金属強磁性の問題への別の足がかりとなる可能性がある。

##### (3) 強相関電子系におけるマヨラナ端状態の発現

トポロジカル物質との関連で、マヨラナ端状態に関する研究もおこなった。まず、1次元Kitaev模型に相互作用を加えた系の厳密な基底状態を求め、この場合にもトポロジカル秩序に伴うマヨラナ端状態が存在することを示した。また、ある種の1次元拡張ハバード模型においても、強磁性超伝導に伴ってマヨラナ端状態が出現することを示した。

##### (4) ボース・ハバード模型における朝永・ラッティンジャー液体

平坦バンドを持つようなボース・ハバード模型での相互作用の効果を研究した。特に高密度領域ではこの問題をスピン鎖の問題に

対応させることが可能であり、それによって、この系がボース粒子のペアを基本要素とする朝永・ラッティンジャー液体としてふるまうことを示した。

##### (5) フェルミオン系とボソン系の基底エネルギーの比較

相互作用する量子多体系の基礎的な問題として、同じハミルトニアンを持つフェルミオン系とボソン系の基底エネルギーを比較した。その結果、相互作用のある場合、大小関係が逆転する場合があることを見出した。

##### (6) 統計力学の基礎に関わる研究

本研究計画の主目標とは少しずれるが、大偏差原理に立脚した平衡統計力学の定式化、非平衡状態が平衡状態に緩和することの証明、熱力学第二法則の量子力学的な証明など、統計力学の基礎に関わる問題についても少なからぬ進展があった。このような研究においても、相互作用する量子多体系は非自明な具体例として中心的な役割を果たした。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 18 件)

Akinori Tanaka and Hal Tasaki,  
“Metallic Ferromagnetism Supported by a Single Band in a Multi-band Hubbard Model”, *Journal of Statistical Physics*, 163, 1049-1068 (2016) (査読あり)  
DOI: 10.1007/s10955-016-1515-y

Hal Tasaki,  
“Typicality of Thermal Equilibrium and Thermalization in Isolated Macroscopic Quantum Systems”, *Journal of Statistical Physics*, 163, 937-997 (2016) (査読あり)  
DOI: 10.1007/s10955-016-1511-2

Hal Tasaki,  
“Quantum Statistical Mechanical Derivation of the Second Law of Thermodynamics: A Hybrid Setting Approach”, *Phys. Rev. Lett.* 116, 170402 (2016) (査読あり)  
DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.170402

Hosho Katsura, Dirk Schuricht, and Masahiro Takahashi,  
“Exact ground states and topological order in interacting Kitaev/Majorana chains”, *Phys. Rev. B* 92, 115137 (2015) (査読あり)  
DOI: 10.1103/PhysRevB.92.115137

Wenxing Nie, Hosho Katsura, and Masaki Oshikawa,  
“Ground-State Energies of Spinless Free Fermions and Hard-Core Bosons”, Phys. Rev. Lett. 111, 100402 (2013) (査読あり)  
DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.100402

Shintaro Takayoshi, Hosho Katsura, Noriaki Watanabe, and Hideo Aoki,  
“Phase diagram and pair Tomonaga-Luttinger liquid in a Bose-Hubbard model with flat bands” Phys. Rev. A 88, 063613 (2013) (査読あり)  
DOI: 10.1103/PhysRevA.88.063613

〔学会発表〕(計 26 件)

田中彰則, 田崎晴明

『多バンド・ハバード模型の最下端バンドに生じる金属強磁性状態』、日本物理学会第 71 回年次大会、2016 年 3 月 22 日、東北学院大学泉キャンパス (宮城県仙台市)

Hal Tasaki,

“Typicality of thermal equilibrium and thermalization in macroscopic quantum systems” Yukawa International seminar 2015, 2015 年 8 月 19 日、京都大学基礎物理学研究所 (京都府京都市)

桂法称, 高吉慎太郎, 渡辺伯陽, 青木秀夫

『平坦バンドのある Bose-Hubbard 模型におけるペア朝永-Luttinger 液体相』、日本物理学会 2015 年秋季大会、2015 年 9 月 16 日、関西大学 (大阪府吹田市)

桂法称

“Exact ground states and topological order in interacting Majorana- and parafermion chains”、第 1 回トポ物質科学領域研究会、2015 年 12 月 11 日-13 日、京都大学 (京都府京都市)

田中彰則

『一次元拡張ハバード模型におけるマヨラナエッジ状態』、日本物理学会第 70 回年次大会、2015 年 3 月 24 日、早稲田大学早稲田キャンパス (東京都新宿区)

田中彰則

『ギャップのない複数バンドを持つハバード模型での強磁性』、日本物理学会 2013 年度秋季大会、2013 年 9 月 28 日、徳島大学三島キャンパス (徳島県徳島市)

〔図書〕(計 1 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/>

<http://park.itc.u-tokyo.ac.jp/hkatsura-lab/>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

田崎 晴明 (Hal Tasaki)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号 : 50207015

(2) 研究分担者

田中 彰則 (Akinori Tanaka)

有明工業高等専門学校・准教授

研究者番号 : 80274512

桂 法称 (Hosho Katsura)

東京大学・理学系研究科・准教授

研究者番号 : 80534594