様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２８年　６月　８日現在

機関番号：１２３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４２０１７６

研究課題名（和文）薄肉弾性体の非線形振動応答を活用した実験的外力分布同定手法の構築

研究課題名（英文）Identification of external force distribution utilizing nonlinear vibration response of thin-walled continuous elements

研究代表者
丸山　真一（Maruyama, Shinichi）

群馬大学・大学院理工学府・准教授

研究者番号：６０３４４９２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，薄肉連続弾性体の振動におけるひずみ応答を用いた外力分布の同定について検討を行った．まず，集中周期荷重をうけるはりの線形応答から，荷重位置を同定する手法と，その雑音に対する影響を明らかにした．続いてはりの線形振動におけるひずみ応答からの外力分布形状の同定法を定式化を行った．さらに，任意外力分布の周期加振をうけるはりの非線形振動応答の解析法を示し，外力分布による非線形振動応答の特徴を明らかにした．

研究成果の概要（英文）：This research deals with identification of distribution of external force utilizing strain response in vibrations of thin walled continuous elements. First, a method is presented to identify an excitation position of concentrated force in a beam with measured signal of strain. Effects of modeling error on the identified results are studied. Next, a method to identify the distribution of excitation force on a beam is presented. Furthermore, an analytical procedure of nonlinear vibrations of a beam, on which arbitrary external force is applied, is introduced. Effects of distribution of external force on the nonlinear response of the beam are discussed in detail.

研究分野：機械力学

キーワード：機械力学

１．研究開始当初の背景

近年，MEMS(Micro Electro Mechanical System)と呼ばれる，集積電子回路の技術を応用した微小機械が盛んに用いられている．MEMS を利用した微細なセンサやアクチュエータの中には，MEMS 内の微小なはりや板構造に変形や振動を生じさせ，動作するものが多く存在する．MEMS を利用したセンサやアクチュエータの精密設計では，微小薄肉要素に作用する静電力や電磁力の分布を精度良く求めることが重要である．しかし，微小な薄肉要素に作用する外力を実験的に求めることは難しく，実際の開発では CAE によるシミュレーションが多用されるものの，その検証を行う手段が無い現状にある．

２．研究の目的

本研究では，薄肉連続弾性体の振動におけるひずみ応答を用いた外力分布の同定について検討を行った．まず，集中周期荷重をうけるはりの線形応答から，荷重位置を同定する手法と，その雑音に対する影響を明らかにした．続いてはりの線形振動におけるひずみ応答からの外力分布形状の同定法の定式化を行った．さらに，任意外力分布の周期加振をうけるはりの非線形振動応答の解析法を示し，外力分布による非線形振動応答の特徴を明らかにした．

３．研究の方法

(1) 分布外力が作用したはりの線形強制振動応答

長さ L，断面積 A，ヤング率 E，厚さ h，断面二次モーメント I の薄肉はりに，はりの軸方向 (x　方向) に分布する周期外力 $F(x,t)=G(x)\cos\Omega t$ が与えられたものとする．ここで，t は時間，Ωは外力の角振動数である．はりの運動方程式は，次式で示される．

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)=G(x)\cos\Omega t$$

この方程式の定常解 $W(x,t)$を，各固有振動モード$\phi_i(x)$で展開し，各固有振動モードに対する減衰比η_iを考慮して求めると，以下のようになる．

$$W(x,t)=\sum_i\frac{\int_0^L G(x)\phi_i(x)dx}{\rho A\int_0^L\phi_i^2(x)dx\Omega_i^2}\times\frac{\phi_i(x)\cos(\Omega t-\varphi_i)}{\sqrt{\left\{1-\left(\Omega/\Omega_i\right)^2\right\}^2+\left\{2\eta_i\left(\Omega/\Omega_i\right)\right\}^2}}$$

$$\cos\varphi_i=\frac{\left\{1-\left(\Omega/\Omega_i\right)^2\right\}}{\sqrt{\left\{1-\left(\Omega/\Omega_i\right)^2\right\}^2+\left\{2\eta_i\left(\Omega/\Omega_i\right)\right\}^2}} \qquad (1)$$

$$\sin\varphi_i=\frac{2\eta_i\left(\Omega/\Omega_i\right)}{\sqrt{\left\{1-\left(\Omega/\Omega_i\right)^2\right\}^2+\left\{2\eta_i\left(\Omega/\Omega_i\right)\right\}^2}}$$

これより，観測点 $x=x_1$ のはり表面で測定したひずみの定常応答は，次式で示すことができる．

$$\varepsilon(x_1,t)=-\frac{h}{2}\sum_i\frac{\int_0^L G(x)\phi_i(x)dx}{\rho A\int_0^L\phi_i^2(x)dx\Omega_i^2}\times\frac{\cos(\Omega t-\varphi_i)}{\sqrt{\left\{1-\left(\Omega/\Omega_i\right)^2\right\}^2+\left\{2\eta_i\left(\Omega/\Omega_i\right)\right\}^2}}\left.\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right|_{x=x_1} \qquad (2)$$

(2) 集中荷重が作用する片持ちはりの微小振動による荷重位置の同定

長さ L の片持ちはり上の $x=x_2$ に集中周期荷重 $F_0\cos\Omega t$ が作用するものとする．このとき，式 (2)において，$G(x)= F_0\cos\Omega t\delta(x- x_2)$とおくことで，観測点 $x=x_1$ のはり表面で測定したひずみの定常応答は，次式で示すことができる．

$$\varepsilon(x_1,t)=-\frac{h}{2}\sum_i\frac{F_0\phi_i(x_2)}{\rho A\int_0^L\phi_i^2(x)dx\Omega_i^2}\times\frac{\cos(\Omega t-\varphi_i)}{\sqrt{\left\{1-\left(\Omega/\Omega_i\right)^2\right\}^2+\left\{2\eta_i\left(\Omega/\Omega_i\right)\right\}^2}}\left.\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right|_{x=x_1} \qquad (3)$$

ここで，片持ちはりの固有振動モード$\phi_i(x)$は次式で示される．

$$\phi_i(x)=\sin\lambda_i\frac{x}{L}-\sinh\lambda_i\frac{x}{L}-\frac{\sin\lambda_i+\sinh\lambda_i}{\cos\lambda_i+\cosh\lambda_i}\left(\cos\lambda_i\frac{x}{L}-\cosh\lambda_i\frac{x}{L}\right)$$

$$\cos\lambda_i\cosh\lambda_i=1$$

片持ちはりを j 次の固有角振動数Ω_jで加振した際のひずみの応答は，近似的に次式となる．

$$\varepsilon_j(x_1,x_2,t)=-\frac{h}{2}\frac{F_0\phi_j(x_2)}{2\eta_j\rho A\int_0^L\phi_j^2(x)dx\Omega_j^2}\sin\Omega_j t\left.\frac{d^2\phi_j}{dx^2}\right|_{x=x_1} \qquad (4)$$

ここで，片持ちはりを，j 次の固有角振動数 Ω_jで，位置 $x=x_2$ において集中周期荷重加振し，観測点$x=x_1$のはり表面で実測したひずみの応答を$\varepsilon_p(t)$とし，この応答から集中荷重の作用位置を同定するため，以下のコスト関数を導入する．

$$R(y)=\frac{\Omega_j}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_j}}\left\{\varepsilon_p(t)-\varepsilon_j(x_1,y,t)\right\}^2dt \qquad (5)$$

ここで，y は仮定した加振位置であり，実測されたひずみと，仮定した加振位置に基づき，モデル式を用いて求めたひずみとの二乗平均でコスト関数は計算される．このコスト関数が最小となる y を最適化手法で求めることで，加振位置 x_2 が推定できる．

モデル化の誤差が十分に小さく，実測したひずみ$\varepsilon_p(t)$が式(4)で求めたひずみと十分によく一致する場合には，コスト関数は次式で示される．

$$R(y)=\frac{\Omega_j}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_j}}\left\{\varepsilon_j(x_1,x_2,t)-\varepsilon_j(x_1,y,t)\right\}^2 dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{h}{2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}\bigg|_{x=x_1}\frac{F_0}{2\eta_j\rho A\int_0^L\phi_j^2(x)dx\Omega_j^2}\right\}^2 \times\left\{\phi_j(x_2)-\phi_j(y)\right\}^2 \tag{6}$$

現実の加振位置同定では，ひずみ応答を得た際に，観測信号に含まれるノイズ，仮定した加振力と実際との差異など，種々のモデル化誤差の存在が予想され，同定結果に誤差が生じる可能性がある．一例として，観測信号$\varepsilon_p(t)$に白色雑音$\varepsilon_N(t)$が混入する場合を考える．このときのコスト関数は，

$$R_N(y)=\frac{\Omega_j}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_j}}\left\{\varepsilon_p(t)+\varepsilon_N(t)-\varepsilon_j(x_1,y,t)\right\}^2 dt \tag{7}$$

となる．ここで，

$$\varepsilon_p(t)=\varepsilon_j(x_1,x_2,t)$$

とすれば，

$$R_N(y)=R(y) -\frac{h}{2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}\bigg|_{x=x_1}\frac{F_0\left\{\phi_j(x_2)-\phi_j(y)\right\}}{2\eta_j\rho A\int_0^L\phi_j^2(x)dx\Omega_j^2} \times\frac{\Omega_j}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_j}}\varepsilon_N(t)\sin\Omega_j t\,dt+\frac{\Omega_j}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_j}}\varepsilon_N^2(t)dt \tag{8}$$

となる．本来の加振位置 $x=x_2$ 近傍で，$R_N(y)$を最小とする $y_{\min}$ の条件は，次式となる．

$$\frac{h}{2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}\bigg|_{x=x_1}\frac{F_0\left\{\phi_j(x_2)-\phi_j(y_{\min})\right\}}{2\eta_j\rho A\int_0^L\phi_j^2(x)dx\Omega_j^2} -\frac{\Omega_j}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_j}}\varepsilon_N(t)\sin\Omega_j t\,dt=0 \tag{9}$$

よって，同定結果の誤差Δy が比較的小さいものとして，$y_{\min}=x_2+\Delta y$ とすれば，式(9)より次式が得られる．

$$\Delta y=\frac{2}{h}\frac{2\eta_j\rho A\int_0^L\phi_j^2(x)dx\Omega_j^2}{F_0\dfrac{d^2\phi_j}{dx^2}\bigg|_{x=x_1}\dfrac{d\phi_j}{dx}\bigg|_{x=x_2}} \times\frac{\Omega_j}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_j}}\varepsilon_N(t)\sin\Omega_j t\,dt \tag{10}$$

(3) 分布荷重が作用する片持ちはりの微小振動による荷重形状の同定

片持ちはりに作用する分布周期外力$F(x,t)=G(x)\cos\Omega t$ の $G(x)$を，次式のようにはりの固有振動モードで展開して表現する．

$$G(x)=\sum_k r_k\phi_k(x) \tag{11}$$

なお，固有振動モードの直交性より，以下の関係が成り立つ．

$$r_k=\frac{\int_0^L G(x)\phi_k(x)dx}{\int_0^L\phi_k^2(x)dx} \tag{12}$$

式(11)で表される分布荷重の下で，片持ちはりを j 次の固有角振動数Ω_jで加振した際のひずみの応答は，近似的に次式となる．

$$\varepsilon_j(x_1,t)=-\frac{h}{2}\frac{r_j}{2\eta_j\rho A\Omega_j^2}\sin\Omega_j t\frac{d^2\phi_j}{dx^2}\bigg|_{x=x_1} \tag{13}$$

ここで，式(13)の$\varepsilon_j(x_1,t)$に対応するひずみ応答$\varepsilon_p(t)$が実測され，ここからr_jを求めることで，はりに作用する分布外力を定めることを考える．式(13)の左辺を$\varepsilon_p(t)$に置き換える．さらに，加振周期にわたって両辺に $\sin\Omega_j t$ を内積し整理すると，次式が得られる．

$$r_j=-\frac{4\rho A\Omega_j^3\eta_j\int_0^{2\pi/\Omega_j}\sin\Omega_j t\cdot\varepsilon_p(t)dt}{h\pi\dfrac{d^2\phi_j}{dx^2}\bigg|_{x=x_1}} \tag{14}$$

これより，ひずみ信号から外力分布の近似的な同定が得られる．

(4) 分布荷重が作用するはりの非線形振動応答

両端がたわみについて固定され，一端が軸方向に弾性拘束された一様はりを解析対象とする．座標系として，はり軸方向に x 軸，たわみ方向に z 軸を設け，z 軸原点をはり軸心上にとる．はり全体の長さを L，はりを N 分割して区分節点の位置をそれぞれ $x_{[0]}=0$，$x_{[1]}$，…，$x_{[n]}=L$ とする．区分 n の両節点の位置を $x_{[n-1]}$ と $x_{[n]}$，区分長さを l_n，区分 n 内の密度，ヤング率，断面積，断面二次モーメントをそれぞれ ρ_n，E_n，A_n，I_n とする．問題を十分に薄いはりの低次の曲げ振動に限定すると，はり自体の軸方向慣性力，回転慣性，せん断変形は無視できる．たわみ及び区分節点における軸方向変位に関する無次元基礎式を式(15)に示す．カンマの後の添字はそれに関する偏微分であることを示し，添字の個数が微分階数に対応している．

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left[\int_0^1 G_w\left(w_n\right)\delta w_n\,d\xi_n+\left[q_{xn}\delta w_n\right]_0^1 -\left[d_n m_{xn}\delta w_{n,\xi_n}\right]_0^1+\left[n_{xn}\delta u_n\right]_0^1\right] +k(u_{[N]}-u_0)\delta u_{[N]}\right\}d\tau=0 \tag{15}$$

$$G_w\left(w_n,u_n\right)=d_n^{-1}\overline{\rho_n}\,\overline{A_n}w_{n,\tau\tau}-d_n n_{xn}w_{n,\xi_n\xi_n} -d_n^{-1}\overline{\rho_n}\,\overline{A_n}p\left(\xi\right)-\frac{1}{d_n}\delta\left(\xi-\xi_s\right)q_s \tag{16}$$

$$n_{xn}=d_n\overline{\rho_n}\,\overline{A_n}\left(u_{[n]}-u_{[n-1]}\right)+\frac{1}{2}d_n^2\overline{E_n}\,\overline{A_n}\int_0^1 w_{n,\xi_n}^2\,d\xi_n$$

$$m_{xn} = -d_n^2 \overline{E_n}\,\overline{I_n} w_{n,\xi_n\xi_n} \tag{17}$$

ξ_n は区分内の無次元座標，$d_n = 1/l_n$ は分割比，w_n は無次元たわみ，Γ ははりの細長比，u_n は無次元の軸方向変位，n_{xn}，s_{xn}，m_{xn}，q_{xn} はそれぞれ区分 n の無次元軸力とたわみ角，曲げモーメント，せん断力，$p(\xi)=p_s+p_d G(\xi)\cos\omega\tau$ は無次元の横方向荷重である．ω は無次元加振振動数，τ は無次元時間である．k は無次元軸方向ばね定数である．区分の両節点における w_n，s_{xn}，m_{xn}，q_{xn} を未知変数とし，これらから成る節点ベクトルを$\{w_{en}\}$とする．区分たわみ w_n を座標関数$\{\zeta_n\}$と$\{w_{en}\}$の成分を用いて，以下のように仮定する．

$$\begin{aligned}
&w_n(\xi_n,\tau) = \sum_{j=1}^{8} w_{enj}(\tau)\zeta_{nj}(\xi_n),\\
&\{\zeta_n\}^T = \{\bar{Z}_n\}^T([D_n][Z_n])^{-1}\\
&\overline{Z_{ni}} = \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{4}\delta_{i,f(k,l)}\left\{(2\xi_n)^{k-1}\cos(l-1)\pi\left(\xi_n+\frac{1}{2}\right)\right\}\\
&f(k,l) = 4(l-1)+k
\end{aligned} \tag{18}$$

$[D_n]$ は区分 n の各諸量による係数行列，$\{\bar{Z}_n\}$ は三角関数とべき関数の積で表される座標関数 $\bar{Z}_{ni}$ から成るベクトルである．$[Z_n]$ は区分 n の両節点における $\bar{Z}_{ni}$ の 0 階，1 階，2 階，3 階微分から成る 8×8 行列である．全節点の軸方向変位 $u_{[N]}$を含む，全区分節点での未知変数から成る全体の節点ベクトル $\{\hat{b}\}$ を導入し，式(15)を整理すると $\{\hat{b}\}$ の成分を用いて次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_0}^{\tau_1}\sum_p\Bigg[\sum_q \hat{B}_{pq}\hat{b}_{q,\tau\tau} + \sum_q \hat{C}_{pq}\hat{b}_q\\
&+\sum_q\sum_r \hat{D}_{pqr}\hat{b}_q\hat{b}_r + \sum_q\sum_r\sum_s \hat{E}_{pqr}\hat{b}_q\hat{b}_r\hat{b}_s\\
&-\hat{F}_p - \hat{G}_p p_s - \hat{H}_p p_d\cos\omega\tau\Bigg]\delta\hat{b}_p d\tau = 0\\
&\left(p,q,r,s = 1,2,\cdots,5(N+1)\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

ここで，係数 $\hat{H}_p$ は外力形状についての関数を関数ζ_jで

$$G(\xi) = \sum_j h_j\zeta_j(\xi) \tag{20}$$

のように展開し求められる分布外力についての係数である．

ここで $\hat{b}_q\left(q = 1,2,\cdots,4(N+1)\right)$ を w_n, s_{xn}, m_{xn}, q_{xn} に，また，$\hat{b}_v\left(v = 4(N+1)+1,\cdots,5(N+1)\right)$ を u_nに割り当てると，次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\sum_q \hat{B}_{pq}\hat{b}_{q,\tau\tau} + \sum_q \hat{C}_{pq}\hat{b}_q + \sum_q\sum_r \hat{D}_{pqr}\hat{b}_q\hat{b}_r\\
&+\sum_q\sum_r\sum_s \hat{E}_{pqr}\hat{b}_q\hat{b}_r\hat{b}_s - \hat{F}_p - \hat{G}_p p_s\\
&-\hat{H}_p p_d\cos\omega\tau = 0\\
&\left(p,q,r,s = 1,2,\cdots,4(N+1)\right)
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_v \hat{C}_{tv}\hat{b}_v + \sum_r\sum_s \hat{D}_{trs} - \hat{F}_t = 0\\
&t,v = 4(N+1)+1, 4(N+1)+2,\cdots,5(N+1)
\end{aligned} \tag{22}$$

式(22)より $\hat{b}_v$ を解き，これを式(21)に代入するとたわみに関する $\hat{b}_q$ のみの方程式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\sum_q \hat{B}_{pq}\hat{b}_{q,\tau\tau} + \sum_q\left(\hat{C}_{pq}+\hat{C}_{1pq}\right)\hat{b}_q +\\
&\sum_q\sum_r\sum_s\left(\hat{E}_{pqrs}+\hat{E}_{1pqrs}\right)\hat{b}_q\hat{b}_r\hat{b}_s\\
&-\hat{F}_p - \hat{G}_p p_s - H_p p_d\cos\omega\tau = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
&\hat{C}_{1pq} = \sum_t\sum_v\left(\hat{D}_{pqr}\hat{C}_{tv}^{-1}\hat{F}_t + \hat{D}_{pvq}\hat{C}_{vt}^{-1}\hat{F}_t\right)\\
&\hat{E}_{1pqrs} = -\sum\sum\left(\hat{D}_{pqr}\hat{C}_{vt}^{-1}\hat{D}_{trs} + \hat{D}_{pvq}\hat{C}_{vt}^{-1}\hat{D}_{trs}\right)
\end{aligned} \tag{24}$$

$\hat{b}_q(\tau)$ を静的成 $\bar{b}_q$ とそれを原点とした動的成分 $\tilde{b}_q(\tau)$ に分離すると，$\bar{b}_q$ に関する連立三次方程式及び $\tilde{b}_q(\tau)$ に関する連立非線形常微分方程式が得られる．$\bar{b}_q$ に関する方程式を数値的に解いて，復元力特性，及び静荷重や初期軸変位に対する静たわみが求まる．静的平衡位置での線形自由振動における i 次の固有振動数 ω_i 及び対応する固有振動形 $\tilde{\xi}_{ni}$ を定め，$\tilde{\xi}_{ni}$ に基づく基準座標 b_i を用いて，$\tilde{b}_q(\tau)$ に関する方程式を変換すると次の規準系の連立非線形常微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}
&b_{i,\tau\tau} + 2\eta_i\omega_i b_{i,\tau} + \omega_i^2 b_i + \sum_j\sum_k D_{ijk}b_j b_k\\
&+\sum_j\sum_k\sum_l E_{ijkl}b_j b_k b_l - H_i p_d\cos\omega\tau = 0\\
&\left(i,j,k,l = 1,2,3,\cdots,4(N+1)\right)
\end{aligned} \tag{25}$$

ただし，上式で線形減衰項を新たに導入してある．η_i は第 i 次モードに対応する減衰比である．式(25)より調和バランス法を用いて動的応答を求めた．

４．研究成果

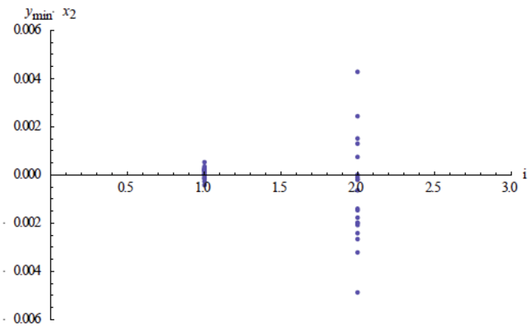
(1) 集中荷重が作用する片持ちはりの微小振動による荷重位置の同定

片持ちはりのに集中周期荷重が作用する際の観測点 x_1 でのひずみ応答を式(4)より求め，これにランダムに生成した等しい標準偏差の複数の白色雑音を混入させた際に，同定されるコスト関数の最小位置 $y_{\min}$ と正しい加振位置 x_2 との差を図 1(a)-(c)に示す．(a)は $x_1=L/4$，$x_2=L/4$，(b)は $x_1=3L/4$，$x_2=L/4$，(c)は

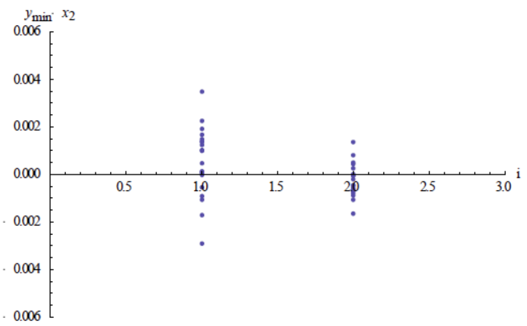
x_1=3L/4, x_2=L/2 の結果を示す．図の横軸は，加振振動数に設定した振動モードの次数を示す．それぞれの結果で，$y_{\min}$ と x_2 との差は，0 のまわりでランダムにばらつくが，これは混入した雑音に含まれる sin$\Omega_j t$ と同期する成分が生成した雑音により異なるためである．

式(10)より，ひずみの観測点 x_1 における，加振した固有振動モード形状の空間 2 階微分が小さく，観測されるひずみが小さい場合には，雑音による同定誤差が大きくなることがわかる．実際に，同じ加振位置 x_2=L/4 における観測位置 x_1=L/4(図(a))と x_1=3L/4(図(b))の結果を比較すると，一次モードを加振した場合には，固定端から遠くひずみが小さい観測位置の後者が，同定の誤差が大きいことが確認できる．

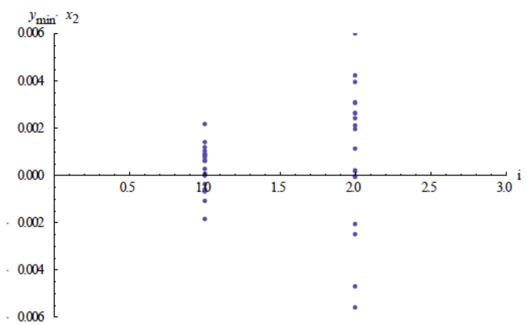
さらに，式(10)より，加振点 x_2 における，加振した固有振動モード形状の空間 1 階微分が小さく，加振位置の変化によるひずみの



(a) x_1=L/4, x_2=L/4,



(b) x_1=3L/4, x_2=L/4



(c) x_1=3L/4, x_2=L/2

図１　集中荷重位置同定における誤差

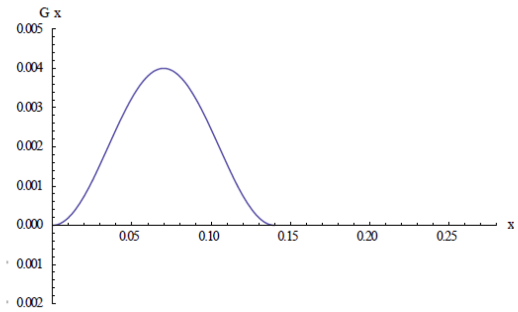
変化が小さい場合にも，雑音による同定誤差が大きくなることがわかる．同じ測定位置 x_1=3L/4 における加振位置 x_2=3L/4(図(b))と x_2=L/2(図(c))の結果を比較する．一次モードを加振した場合には，加振点が固定端に近い前者ではたわみ角，つまりモード形状の空間 1 階微分が小さく，同定誤差が大きいことがわかる．一方，二次モードを加振した場合では，モードの腹が x=L/2 付近に存在し，ここでのたわみ角は小さいため，x_2=L/2 の結果では同定誤差が大きくなることがわかる．

(2) 分布荷重が作用する片持ちはりの微小振動による荷重形状の同定

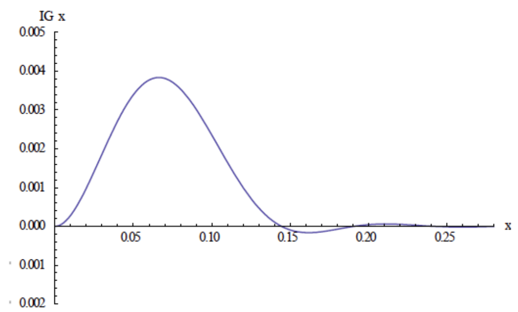
式(11)から式(14)で述べた方法を用いて，分布荷重が作用する片持ちはりのひずみ応答から，分布荷重を再構成した結果の例を図 2, 3 に示す．いずれも(a)は仮定した外力形状，(b)は再構成した外力形状である．片持ちはりの振動モードは各モードとも自由端側でのたわみとたわみ角が大きいため，外力分布が自由端側に集中している際には，再構成結果に乱れが出やすいものの，概ね外力分布を再構成できていることがわかる．

(3) 分布荷重が作用するはりの非線形振動応答

式(15)から式(25)に基づき求めた軸方向弾性拘束をうける両端固定はりの非線形振動応答の解析例を示す．図 4 (a)-(c)に示す 3 種類の分布荷重に対応した，非線形周期応答のはりのたわみ振幅に関する周波数応答曲線を図 5 に示す．振動モードの腹に一致する場所に分布荷重が存在すると，そのモードの共振振幅が増加することは線形の場合と同様

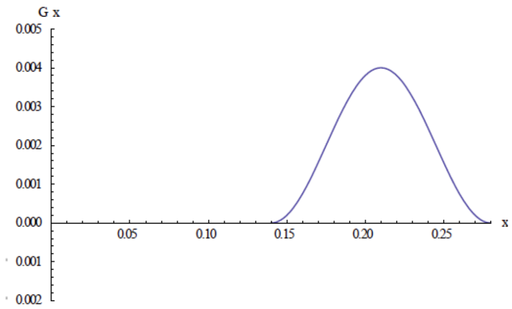


(a)仮定した外力分布

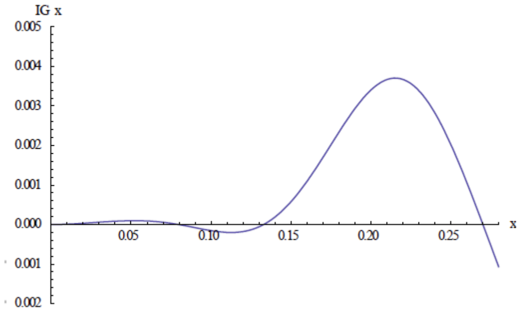


(b)外力分布の再構成結果

図２　外力分布の再構成



(a)仮定した外力分布

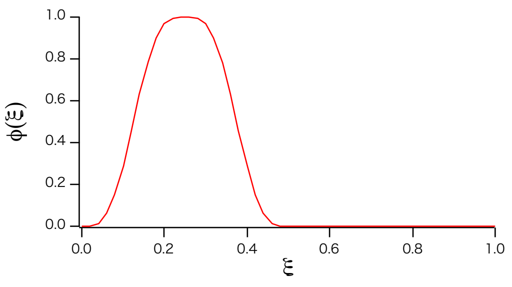


(b)外力分布の再構成結果

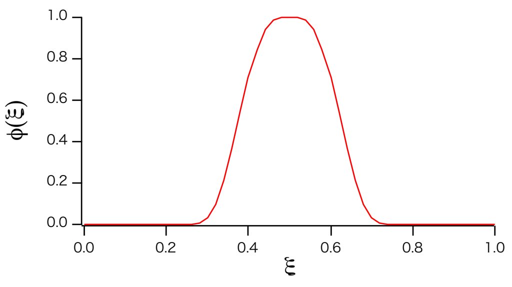
図３　外力分布の再構成

である．また，対称モードと非対称モードの反共振点が，外力の分布により特徴的に変化することが確認できる．

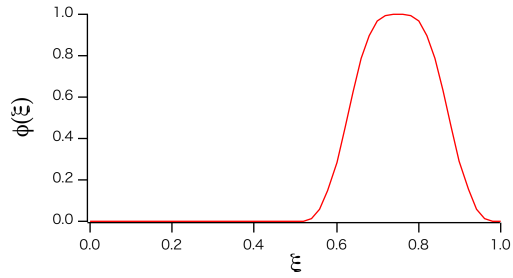
非線形振動による特徴として，一次振動モードの共振において，高次振動モードが寄与することがあげられる．図６は３次振動モードの周波数応答を示しており，外力分布の変化により，一次モードの主共振における３次モードの寄与が顕著に変化することが確認できる．



(a) 外力形状１　左側



(b) 外力形状２　中央



(c) 外力形状１　右側

図４　外力形状

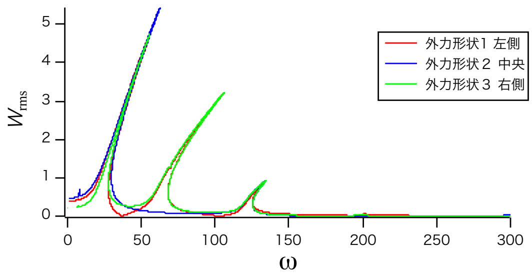


図５　たわみ振幅の非線形周波数応答

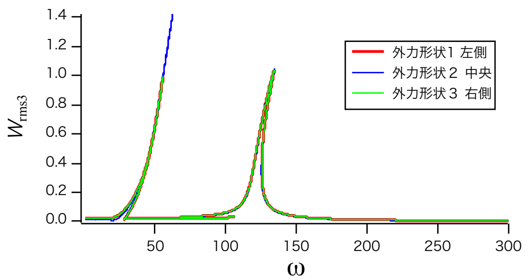


図６　３次モードの非線形周波数応答

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計１件）

①西宮　啓伍，丸山　真一，山口　誉夫，片持ちはりのひずみ応答に基づく集中周期　荷重位置の同定に関する基礎的検討，日本機械学会機械力学・計測制御部門講演会，2015 年 8 月 26 日，弘前大学（青森県・弘前市）

６．研究組織

(1)研究代表者

丸山　真一（MARUYAMA SHINICHI）

群馬大学・大学院理工学府・准教授

研究者番号：６０３４４２９５