

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25540009

研究課題名(和文) ゲーム論的確率論とランダム概念に基づく予測理論

研究課題名(英文) Theory of prediction based on game-theoretic probability and randomness

## 研究代表者

竹村 彰通 (Takemura, Akimichi)

東京大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：10171670

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：ゲーム論的確率論では複数のプレイヤー間のゲームを設定することによってプレイヤーの確率的な挙動が帰結する。しかしながら確率的な挙動はプレイヤーの決定的な戦略に基づいて示されることが多い。特に Reality とよばれるプレイヤーの戦略は通常測度論的確率論では考察されないため、Reality の決定的な戦略の研究は新たな領域である。本研究においては Reality の決定的な戦略の一般的な構成法を与えることに成功した。

研究成果の概要(英文)：In game-theoretic probability stochastic behavior of the players results from a game between players. However the stochastic behavior is often a consequence of a deterministic strategy of the players. In particular, the strategy of the player "Reality" does not have a counterpart in the usual measure-theoretic probability and it is a new field of research. In this project we succeeded in establishing a general method for constructing Reality's deterministic strategy.

研究分野：確率論

キーワード：確率論 ランダムネス

### 1. 研究開始当初の背景

ゲーム論的確率論は、Shafer and Vovk (2001) の本によって提唱されて以来、さまざまな結果が得られて来ている。研究代表者(竹村)、分担者(宮部賢志)および協力者(竹内啓、公文雅之)も継続的にこの分野に貢献し、すでに 10 本以上の論文を刊行してきた。しかしながら、ゲーム論的確率論の研究者はまだ世界的にも少数にとどまっているのが現状である。

この理由の一つとして、ゲーム論的確率論の結果が、測度論的確率論の結果の書き直しであると考えられていることがあげられる。そのような中で、ゲーム論的確率論研究の意義を示すためには、ゲーム論的な設定でしか現れない問題設定における結果を導出することが重要である。特にゲーム論的確率論に現れる Reality とよばれるプレイヤーの戦略は測度論的確率論では現れないため、Reality の戦略の研究は一つの重要な課題であった。

他方、測度論的確率とはかなり離れた分野として、ランダムネスの分野があげられる。この分野も最近急速に発展している。ランダムネスの分野では計算可能性が問題となり、測度論的確率とは理論構成がかなり異なるが、ゲーム論的確率論は両者の中間的な位置にあるとも考えられる。そのため、測度論的確率のみならず、ランダムネスの理論からもさまざまな概念や証明手法をゲーム論的確率論において利用できる状況になっていた。

### 2. 研究の目的

本研究は、ゲーム論的確率論及びランダムネスの研究で用いられる技法を用いて、確率構造に仮定を置かない、もしくは少ない仮定の元でのゲームの設定において、汎用性のある予測理論を開拓することを目的としたものである。ゲーム論的確率論は、賭けゲームにおける賭け戦略に基づいて、測度を用いることなく確率論の基礎づけを与える理論である。またランダムネスは計算可能性の観点から不確実性に対する原理的な基礎づけを与えている。いずれの理論においてもマルチンゲールや予測不可能性が一つの本質的な概念であり、これらを用いることにより、予測理論における新たな展開が可能となる。

### 3. 研究の方法

本研究では、統計学の手法やランダムネスの分野での手法を融合して、ゲーム論的確率論での結果を得るとともに、defensive forecasting の議論を用いて予測理論への応用をはかる。研究代表者の竹村は数理統計学において長い間の研究の蓄積がある。また研究分担者の宮部はランダムネスに関して日本を代表する若手の研究者である。ゲーム論的確率論と統計学との関係については、ゲーム論的確率論の賭け戦略の構成は尤度比

検定と密接な関係があり、多くの場合資金過程自体がランダム性を検定するための尤度比統計量と一致する。従って数理統計のさまざまな理論的な蓄積をゲーム論的確率論に応用することができる。

またランダムネスの理論におけるさまざまな概念や証明の手法はゲーム論的確率論でも非常に有効であり、従来の測度論的確率では用いられなかった新しい証明法を示唆することが多い。このように竹村と宮部の共同研究により、確率・統計・ランダムネスにまたがるパラダイムの変化をもたらす成果を得ることが期待された。特にランダムネスの分野における証明方法は、ゲーム論的確率論のゲームのプレイヤーの一人である Reality の戦略の研究にも有用である。

### 4. 研究成果

本研究の主要な研究成果は、以下の論文  
Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura.  
Derandomization in game-theoretic probability. Stochastic Processes and their Applications, Vol.125, 2015, 39-59.

において示された Reality の決定的な戦略の一般的な構成法である。

Reality の決定的な戦略については、すでに一つ前の論文

Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura.  
The law of the iterated logarithm in game-theoretic probability with quadratic and stronger hedges. Stochastic Processes and their Applications, Vol.123, 2013, 3132-3152.

において、基本的な概念定義がおこなわれ、Skeptic の確定的な戦略を変形することで Reality の戦略が得られることを示した。しかしながらこの論文では変形の方法が明示的でなく、Reality の戦略の具体的な構成が明確でなかった。この点を解決し、2015 年の論文では、具体的なかつ一般的な Reality の戦略の構成法を示したことが本研究の主要な成果である。その具体的な構成法は次の 3 つのステップからなる。

1. 基本となる Reality のランダムな戦略を指定する。
2. プレーヤーの一人である Skeptic の戦略で、そのランダムな事象を強制する戦略を構成する。
3. その Skeptic の戦略を Reality の戦略に変換する。

この 3 つのステップを踏むことにより、Skeptic の戦略から Reality の戦略が導出されることが示される。

Reality の決定的な戦略は、Reality の出

す手の無限列が，ランダムな性質を有しつつ決定的に生成されることを保証するものである．このように，決定的な手続きによりランダムな無限列と区別できない系列，あるいは目的に応じてランダムな系列と同じ性質を有する系列，を生成する方法は一般に脱ランダム化 (derandomization) とよばれている．

計算機科学や情報理論においては，真にランダムな系列が得られるとの理論的な仮定のもとで，さまざまなアルゴリズムの存在やその性能評価がおこなわれている．これらは乱択アルゴリズムとよばれるが，多くの場合において，決定的なアルゴリズムに比べて乱択アルゴリズムは設計が容易であったり，実際上の性能が良いことが知られている．一方で現在の計算機は決定的な動作をしており，真にランダムな入力を用いることはできない．真にランダムな入力とは理想的なものであり，例えば物理的な乱数を用いても，真にランダムであるかどうかは保証されない．したがって，決定的ではあるが十分にランダムな系列が得られれば，乱択アルゴリズムをそのまま決定的なアルゴリズムとして用いることができる．このような背景から，脱ランダム化は広く研究されている．2015年の論文の成果は，脱ランダム化という広い観点からも重要な成果である．

その他に，本研究での研究成果として，ゲーム論的な立場からの重複対数法則の精密化と賭け戦略に基づく証明を与えたことがあげられる．次の原稿は現在国際雑誌に投稿中である．

"Erdos-Feller-Kolmogorov-Petrowsky law of the iterated logarithm for self-normalized martingales: a game-theoretic approach" by Takeyuki Sasai, Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura. arXiv 1504.06398. April 2015.

この原稿では，重複対数法則の精密化である Erdos-Feller-Kolmogorov-Petrowsky 型 (EFKP 型) の重複対数法則について，測度論的確率の立場から見ても新たな結果を導出し，その証明をゲーム論的確率論の賭け戦略を用いて与えている．

特に重要な点は，マルチンゲール差分の系列の無限大への発散に関する正則条件のもとで，条件つき分散の系列に対してではなく，マルチンゲール差分の二乗和に対して EFKP 型の重複対数法則が成り立つことを示した点にある．分散ではなく，確率変数の二乗和との比較において確率変数の和の挙動を考察する方法は self-normalized process とよばれており，統計学では  $t$  統計量の挙動を考察することに対応する．

この原稿で示されているように，実はマルチンゲールの挙動は，分散と比較するよりも

self-normalized process の形で考察するほうが，統一的かつ明確な結果が得られることがわかってきている．このことは，通常の実数法則においても，分散に関する条件は必ずしも本質的ではないことを意味している．Self-normalized process の観点からゲーム論的確率論の既存の結果を再検討するも，今後の研究課題として重要なものと思われる．

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2 件)

Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura. Derandomization in game-theoretic probability. *Stochastic Processes and their Applications*, 査読有り, Vol.125, 2015, 39-59.

doi:10.1016/j.spa.2014.08.004.

Kenshi Miyabe and Akimichi Takemura. The law of the iterated logarithm in game-theoretic probability with quadratic and stronger hedges. *Stochastic Processes and their Applications*, 査読有り, Vol.123, 2013, 3132-3152.

doi:10.1016/j.spa.2013.03.018.

〔学会発表〕(計 7 件)

“ランダムな概念の多数問題”，宮部賢志 (joint with Rupert Hözl). 日本数学会年会，筑波大学．2016年3月7日．

"Erdos-Feller-Kolmogorov-Petrowsky Law of the Iterated Logarithm for Self-Normalized Processes : a Game-Theoretic Approach"(ポスター発表)，発表者：笹井健行，共著者：宮部賢志，竹村彰通．応用統計学会2015年度年会，京都大学．2015年3月14日．

"Derandomization in game-theoretic probability" Kenshi Miyabe (joint with Akimichi Takemura). an invited talk at Fifth Workshop on Game-Theoretic Probability and Related Topics, Guanajuato, Mexico. November 13, 2014.

"A game-theoretic proof of the Erdos-Feller-Kolmogorov-Petrowsky law of the iterated logarithm for fair-coin tossing", Akimichi Takemura (joint with Takeyuki Sasai and Kenshi Miyabe), an invited talk at Fifth Workshop on Game-Theoretic Probability and Related Topics, Guanajuato, Mexico. November 13, 2014.

“EFKP型の重複対数法則のゲーム論的証

明", 講演者: 竹村彰通, 共著者: 笹井健行, 宮部賢志. 日本数学会 2014 年度年秋季総合分科会, 広島大学. 2014 年 9 月 26 日

"ゲーム論的確率論における EFKP 形式の重複対数の法則" 講演者: 笹井健行, 共著者: 宮部賢志, 竹村彰通. 2014 年度統計関連学会連合大会. 東京大学本郷キャンパス. 2014 年 9 月 14 日.

"積分テストに関する Lebesgue 点の特徴付け" 宮部賢志. 日本数学会 2014 年度年会, 学習院大学. 2014 年 3 月 15 日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等 なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

竹村 彰通 (TAKEMURA Akimichi)

東京大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号: 10171670

### (2) 研究分担者

宮部 賢志 (MIYABE Kenshi)

明治大学・理工学部・専任講師

研究者番号: 00583866

(3) 連携研究者      なし