

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：12604

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25590259

研究課題名(和文) 初等教育段階における代数的思考の育成カリキュラム開発

研究課題名(英文) Curriculum development for Algebraic thinking in elementary school mathematics

研究代表者

藤井 斉亮 (Fujii, Toshiakira)

東京学芸大学・教育学部・教授

研究者番号：60199289

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：数学史をみると、文字表記が充実する以前において、一般性を含意して論を展開する際には、数字を用いた式を用いていたが、その数固有の性質を意図的に回避していた。中村幸四郎はこのような数字を用いた表現に着目し、「準一般的な方法」と特徴付けた。本研究では、このような数を擬変数(quasi-variable)と命名した。

本研究では、わが国における授業研究において、学習指導案の検討過程および研究協議会で授業課題を予想される子どもの反応などから吟味・検討する際にそれが擬変数の視点から行われていることを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In history of mathematics, before people created formal algebraic notations, numerical expressions were used to express a general aspect of arguments. Nakamura (1971) characterized those numerical expressions as “quasi-general method” to capture their nature. In this study, the term “quasi-variable” is used to express the numbers used in this manner.

The study reveals that in Japanese Lesson Study context the task design and evaluation are based on quasi-variable aspects. Furthermore, tasks are created and designed with consideration of anticipated student thinking and solutions, and are evaluated through the post-lesson discussion that follows a research lesson.

研究分野：数学教育学

キーワード：擬変数 初等代数 代数的思考 授業研究 研究授業 研究協議会 学習指導案 教材研究

1. 研究開始当初の背景

国の内外を問わず、算数から数学へ飛躍する際の急所のひとつが文字 a 、 x などを用いた「文字の式」の学習である。だが、実際は、ここで多くの生徒が困惑し、数学嫌いになっている。にもかかわらずこの学習困難性に対してこれまで明確な改善指針が提言されていない。その原因は次の2点と考える。

(1) 数字を用いた「数字の式」と文字を用いた「文字の式」が乖離して指導されている。

(2) 「式に表す」「式をよむ」「式の形式的処理」の過程が個別的に指導され、式が数学的問題解決において思考の道具として機能することの視点が欠落している。

特に(1)は、小学校では「数字の式」、中学校では「文字の式」を用いるという教育現場の常識として定着している。本研究では、この常識の背後に根本的な誤りがあると考えた。すなわち、問題の本質は、「数字の式」は具体的・個別的で、「文字の式」は一般的であるという思い込みにあると考えた。「文字の式」は一般性を表現できるが、「数字の式」では一般性を内包した命題を表現することはできない、という思い込みである。

だが、数学史をみると、文字表記が充実する以前では、一般性を含意して論を展開する際には、「数字の式」が用いられている。中村幸四郎は『数学史』の中で、このような数字を用いた表現に着目し、「準一般的(quasi-allgemein)な方法」と述べている(共立全書,1971,p.93)。本研究では、このような数を擬変数と命名した。すなわち、擬変数とは数字で表記されているが、一般性を内包している数である。この擬変数を「数字の式」から「文字の式」に至る指導に活かしたいというのが着想の原点である。

2. 研究の目的

本研究の目的は数学史における擬変数の機能に焦点をあて、規範的に教材を開発し、その教材を用いて授業実践を行い、初等教育段階における代数的思考と表現の育成を擬変数の役割と機能に着眼して規範的実証的に示すことである。また、授業研究の文脈において、授業課題を学習指導案検討過程で吟味する際にそれが擬変数の視点から行われていることを実証的に示すことである。

3. 研究の方法

数学史を参照して擬変数の機能・特性を明らかにし、擬変数の価値を具現化する「数字の式」の授業課題を開発する。

わが国の授業研究の過程の中で、研究授業を計画・構想する際に、そこでの授業課題が擬変数の視点から行われている実態を観察記述研究・教師へのインタビュー調査によって明らかにする。具体的には、都内の公立小学校3校を選び、ケーススタディを実施した。

4. 研究成果

(1) 授業研究における学習指導案の検討過程についてケーススタディを行った結果、授業課題の適切性の吟味は、大きく2つの観点で行われていることが判明した。一つは、学習指導要領における位置づけから見た本単元や本時における授業課題の役割や価値の確認である。もう一つは、細かい数値の吟味を含む授業課題の適切性の検討であり、この部分がまさに擬変数の視点からの授業課題の検討であることが明らかになった。

(2) 擬変数の視点から授業課題の条件に関して数値を詳細に検討する活動は『The Teaching Gap』の中にも「授業の導入問題、実際に使用する言葉と数に関する細部にわたる検討」(訳本 p.111)として特定されている。そこでは数学的視点のみでなく、学級経営などの別の視点から数値、すなわち擬変数が選択されている。また、ケーススタディを実施したS校でも子どもの実態との関連から数値が吟味されていた。実際、「Aの人はなんと7秒5なんですね。50mが。うちのクラスそんなに速くないから、(略)計算しやすいようにした為に」(第4回 24:00)と述べ計算のし易さが考慮される一方で、擬変数として選ばれた数値が子どもの実態や生活から見て現実的であるかという視点からも検討されていることが判明した。すなわち、授業課題における擬変数は、数学的概念に照らして課題が内包する条件が適切か、計算過程と結果から見て数値が妥当かなど数学的な観点から吟味されている一方で、授業課題に対する子どもの反応も同時に吟味されており、授業課題における擬変数の決定は実際に子どもがどう課題を解くかを視野に入れている点に特徴があることが判明した。

(3) 予想される子どもの反応の検討

予想される子どもの反応は、まず、クラスの全体的な傾向としてどのような反応がでるかが検討されている。また、遅れがちな子どもはどのよう反応するか、それに対してどのような支援をするかが検討されている。一方、早く終わってしまった子どもへの対応も検討されている。

予想される子どもの反応：全体的な傾向
S校では6年生に自分になったつもりで考えようとの提案があり、皆で子どもの反応を出し合っていた。このことを通して、学習指導案にある4つの反応(公倍数に揃える解法2つ、1に揃える解法2つ)の出現の可能性を確認していた。M校では $8 \div 2$ から問題を作ることが課題なので、包含除と等分除の両方を子ども達が果たして作れるか、片方のみかを吟味している。一方、早く終わった子への対応などを検討している。

M校では「やってみて苦しいところありますか。過去の経験で」(第2回目 35:00)という発言があったが、この発言が示すように、教師達は擬変数を用いて実際に計算をし、そ

それぞれの経験知を持ち寄って子どもの反応を具体的に予想していることが判明した。

遅れがちな子どもの反応とその対応

ケーススタディを実施した3校とも遅れがちな子どもが授業においてどう反応するかが吟味され、その対応も話し合われていた。特にS校では、自力解決場面で遅れがちな子どもを黒板の前に集めることになっており、そこでどのようなヒントを出すかが擬変数視点から具体的に検討されていた。具体的には公倍数で揃えることはヒントとしては出しやすいが、最終的に最も良い方法として授業で採用されないことが問題とされた。そして、「30mで5秒」に注目して、「これが綺麗に割れるんだよね」「5秒かかっているけど、1秒だったら何m行けるかね、(と)言ったら結構いけるかな」「うん。いけてますね」(第2回37:05)という発言がなされ、最終的には1秒あたりに着目させるヒントを出すことになった。

(4)比較検討場面の検討

比較検討場面は、自力解決によって出現した複数の解法を吟味することを通して、背後にある数学的見方・考え方を顕在化させる場面であり、問題解決型授業では重要な場面とされている。S校の授業者は、その重要性を「全部正しいんだけど、そこで終わりにしないで、より良い考えを追求していくって所に、本時の話し合いの活動の一番のポイントをもっていきなと思ってます」(第2回8:16)と述べている。そして「より良い考えを見つける為の課題をもう一つ最後にもっていきかなと思ってます」(第2回8:56)と述べている。その課題とは新しく3名DEFが加わったという設定である。3名増やした意図を授業者は「公倍数は面倒だからって言わせたいので」(4回目17:31)と述べている。

M校では包含除型と等分除型の文章題を比較し、かけ算の式で統合することで、自力解決の解法をさらに高めようとし、「どうやって言うとかかけ算の式がでてくるの」(第3回68:30)と研究主任が問い、その後17分20秒の間、その擬変数の視点から発問のあり方について詳細に議論している。

(5)予想される子どもの反応を考察する意義

本研究で対象となった3校では、授業課題に対して子ども達がどういう反応を示すかを擬変数の視点から詳細に検討していた。しかも、その予想される反応を踏まえて授業課題の数値を設計し直していた。

では、我が国の教師が、授業課題に対して子どもの反応を予想し、詳細に検討するのは何故か。それは、擬変数の役割と機能、授業課題の検討の文脈でいえば、課題の条件や特徴が子どもの解法に直接的に影響を与えることを教師は知っているからであろう。実際、S校では、ABCの3名の子どもデータの示

して速さ比べをさせた後、DEFの3名を加えている。そのときの数値について、授業者は「公倍数は面倒だからって言わせたいので」(4回目17:31)と述べている。すなわち子どもの解法を距離÷時間に志向させる数値を意図的に選んでいるのである。

一方、ABCについては、BCがそれぞれ(30, 6)(30, 5)という組み合わせであり、「これが綺麗に割れるんだよね」(第2回37:05)という発言があり、 $30 \div 5$ が出現する道筋を想定していた。ここでの $30 \div 5$ は、1秒あたりに進む距離の算出を促す数値として選ばれている。すなわち、30と5は1秒あたりを子どもが志向しやすい数値として位置付けられている。換言すれば、擬変数からどの範囲の解法・方略が導けるかを教師達は吟味しているのである。まさに、教師達が吟味している数値は、具体的だが一般性を内包しており、擬変数(Fujii & Stephens, 2001, 2008, 2010)である。

授業課題の数値を擬変数とみると、事前検討会における授業課題の具体的な数値の詳細な検討は、一見すると一般性を考慮していないように見えるが、そうではないことがわかる。むしろ一般性が志向されているのである。

予想される子どもの反応を検討する意義は、授業課題を構成している具体的な条件が子どもの解法にどのように影響するかを予想することで、その数学的一般性を特定し、価値を顕在化させることにある。『The Teaching Gap』では繰り下がりのある減法の問題が検討されていたが、繰り下がりのある減法の問題では、減加法・減減法・数え引き・数えたしなどの解法が出現するであろうが、減加法に価値を見出し、それが出現しやすい数値を選択しているのである。また、教科書では $13-9$ や $12-9$ が使用されているが、それも減加法へと導く数値として選ばれているのである(Doig他, 2011)。

このように考えると、授業課題の解決は単に答えを得ることが目的ではないことがわかる。減加法は十進位取り記数法の特徴を活用する解法である。減加法を経験することを通して、数の計算は数の表記の特徴を活用すると良いことを子ども達に感得させたいのである。S校の速さの授業では距離÷時間を試行しやすい数値が意図的に選ばれ、T校では平行・垂直に着目しやすい図形が選択されていた。授業研究における課題設計は、課題に対する複数の解法を予想して、それらの背後にある数学的価値を明確に特定するだけでなく、解法の出現の傾向までも予想することで、価値の実現を着実に目指している点に特徴があるといえる。子どもの反応や解法を予想することで、授業目標が着実に達成されるようにしているのである。

(6)授業課題の評価の場としての研究協議会 授業研究の5つの構成要素(研究主題の決

定、学習指導案の検討、研究授業、研究協議会、総括・反省)に照らしてみると、授業課題の評価が研究授業直後の研究協議会で行われることが特徴的である。S校ではDEFの3名のデータを加えたことが議論され、これらを追加せずに最初に提示したABCの3名のデータに留めておいた方が授業目標に迫れたのではないかと指摘された。授業課題の評価が、授業で出現した子どもの考えや実態に基づいて具体的に行われたのである。これは他の2校でも見られた。

授業課題の評価に加えて、S校の場合、さらに擬変数の視点から課題の修正案が提示された。実際、指導助言者は、速さの導入において本時では6組の数値、多くの教科書では3組の数値を示しているが、2組でも良いとし、提示する数値の組の数を減らす提案をしている。そして、数値の組み合わせの例として、具体的に「混み具合」(5年生)の授業課題を次のように示している。

	プールの面積	人数
A	200 m ²	15 人
B	400 m ²	45 人

プールの面積はAの2倍がBであり、人数ではAの3倍がBとなるように設定されている。AとBで揃っている数値はないが、このように公倍数を見出しやすい数値であれば、2組のデータで十分ではないか、という提案である。

授業研究における授業課題の設計は、事前検討会では予想される子どもの反応を視点として行われるが、研究協議会においては、実際に出現した授業における子どもの反応に基づいて具体的に行われる。そしてS校では、研究協議会が課題の再設計の場としても機能していたといえる。換言すれば、事前検討会で見落としていた論点や議論の質が研究協議会で顕在化されたのである。授業研究の第二段階の中に位置する学習指導案の検討の役割と機能は、第三段階の研究授業、第四段階の研究協議会と密接に関連していることが改めて確認されたと言える。

<引用文献>

- 中村幸四郎(1971)『数学史』共立全書
- Doig, B., Groves, S., and Fujii, T. (2011). The critical role of task development in lesson study, in Hart, Lynn C.; Alston, Alice S. and Murata, Aki (eds.), Lesson study research and practice in mathematics education, pp. 181-199, Dordrecht: Springer.
- Fujii, T. & Stephens, M. (2001). Fostering an Understanding of Algebraic Generalization through Number Expressions: The Role of Quasi-variable. Proceedings of 12th ICMI Study Conference, The Future of the Teaching and Learning of Algebra. pp. 258-264
- Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using

Number Sentences to Introduce the Idea of Variable. Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, Seventeenth Yearbook, pp.127-140

Fujii, T. (2010). Designing Tasks in the Japanese Lesson Study: Focusing on the Role of the Quasi-variable, Proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education EARCOME5, Tokyo, Japan. pp.86-93

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). The Teaching Gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: The Free Press. 湊三郎訳(2002)『日本の算数・数学教育に学べ』教育出版社

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計1件)

Fujii, T. (2015). The Critical Role of Task Design in Lesson Study. ICMI Study 22: Task Design in Mathematics Education, Springer. DOI 10.1007/978-3-319-09629-2. pp. 273-286

[学会発表](計1件)

Fujii, T. (2015). Lesson Study for Improving Quality of Mathematics Education. In Vistro-Yu, C. (Ed.). (2015). In pursuit of quality mathematics education for all: Proceedings of the 7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Cebu City, May 11-15. Quezon City: Philippine Council of Mathematics Teacher Educators (MATHTED), Inc. 2015, pp.41-48

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤井 斉亮 (FUJII Toshiakira)
東京学芸大学・教育学部・教授
研究者番号: 60199289