様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号：１３６０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2013～2015
課題番号：２５６１０００２

研究課題名（和文）小圏のコホモロジー論によるアソシエーションスキーモイドの研究

研究課題名（英文）Studies on association schemoids with insights gained from cohomology theory of small categories

研究代表者
栗林　勝彦（KURIBAYASHI, Katsuhiko）

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：４０２４９７５１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：代数的組合せ論の研究対象であるアソシエーションスキームは、圏論的観点から一般化され(擬)スキーモイドが導入された。亜群の圏と細スキーモイドの圏との同値が示された後、擬スキーモイドの圏にホモトピー関係が導入され、さらに小圏の作る2-圏が擬スキーモイドの2-圏に埋め込まれることが示された。圏論的表現論に関しては，Mitchellの埋め込み定理が従順スキーモイドに対して証明され、この結果を用いて、スキーモイドに付随するある関手圏上の鎖複体がつくるアーベル圏にモデル圏構造が入ることを示した。また、二進コードのHammingスキームは位数2の巡回群とスキーモイドの圏で森田同値になるという結果を得た。

研究成果の概要（英文）：We have proposed the notion of (association) schemoids generalizing that of association schemes, which are widely used in algebraic combinatorics, from a small categorical point of view. In our study, the equivalence between the categories of groupoids and that of thin schemoids is established. Moreover, in order to develop homotopy theory for schemoids, we define a homotopy relation on the category of quasi-schemoids and study its fundamental properties. In consequence, the 2-category of small categories is embedded into the 2-category of quasi-schemoids. As for categorical representation theory for schemoids, we have proved Mitchell's embedding theorem for a tame schemoid. The result allows us to give a cofibrantly generated model category structure to the category of chain complexes over a functor category with a schemoid as the domain. We show that every Hamming scheme of binary codes is Morita equivalent to the association scheme arising from the cyclic group of order two.

研究分野：トポロジー

キーワード：スキーモイド　2-圏　森田同値　強ホモトピー　モデル圏　Mitchell埋め込み定理　アソシエーションスキーム　小圏のコホモロジー

1．研究開始当初の背景

アソシエーションスキーム (以下 AS またはスキーム) は統計学の実験計画法の中で導入され、1970 年代 Delsarte により符号理論や有限個の点の良い配置を考察するデザイン論と深く関連し発展してきた。また代数的組合せ論の重要な対象として坂内等により研究されている。さらに Zieschang 等により有限群の一般化としての側面も強調され、特に AS の隣接代数(Bose-Mesner 代数)を経由して指標理論、有限次限代数の表現論的考察や道具も用いられその研究が進められている。ごく最近では花木、French によりそれぞれ異なる AS の圏が定義され([F], [H]) スキームの大局的な振る舞いも考察されてきた。一方、ホモトピー論的、圏論的手法による有限群の研究は、そのコホモロジー論が伝統的に分類空間を用いて展開されてきた。それらは、Baues、Webb、Xu 等により小圏のコホモロジーにまで拡張されることで、圏論的表現論としてさらに興味ある新しい研究対象、例えば輸送圏を生んでいる。

本課題はこのように近年生じている研究の潮流を捉え「圏論的、ホモトピー的側面から AS の研究に現れる様々な概念を小圏の研究を通して一般化し、新しい研究対象を生み出すことで、それらの考察の AS または代数的組合せ論研究への還元」を目ざしている。

2012 年、研究代表者により AS は圏論の立場から一般化され、それらは現在 (擬) スキーモイドと呼ばれている。Terwilliger 代数の圏 AS での一般化や、群論からの AS 理論への一般化 (例えば、積、レス積や拡大の概念) は、代数的組合せ論の研究者により、その研究が近年活発になっている。これらを“亜群からスキーモイド理論”へ持ち上げることにより興味ある概念の誕生も十分に期待できる。以上のように様々なアイディアが現れホモトピー論的手法と、代数的組合せ論的手法が圏論的考察のもとで融合され、本課題により新しい研究対象および、研究手法(それは今まで”遠い”と思われていた研究分野間共通の)が生み出される可能性がある。

<参考文献>

[F] C. French, Functors from association schemes, J. Combin. Theory Ser. A 120 (2013), 1141-1165.

[H] A. Hanaki, A category of association schemes, J. Combin. Theory Ser. A 117 (2010), 1207-1217.

2．研究の目的

本課題では次の研究を進めた。⑴ スキーモイドの圏 ASmd を定義し、その適切な部分圏と亜群の圏との同値性を示す。⑵ 小圏の Baues-Wirsching コホモロジーを用いてスキーモイドのホモロジー論的考察を進める。特にスキーモイドの拡大を定義しその分類をコホモロジーの言葉で記述する。⑶ スキーモイドの圏にモデル圏の構造を入れ、ホモトピー論的考察が可能な体系を構築する。⑷ 隣接代数の一般化であるスキーモイドの Bose-Mesner 代数に圏論的表現論を適用し、小さな代数の分類を行う。

3．研究の方法

本課題遂行のために、AS の専門家である花木章秀氏（信州大学)、組合せ論を専門とする沼田泰英氏（信州大学）に研究協力者として本研究に参画して頂き議論を重ね AS 論のスキーモイドでの一般化に向け研究を進めた。また圏論、ホモトピー論、組合せ論、位相幾何学研究者との議論の場を設けるために小研究集会やセミナーの開催を企画するとともに、スキーモイドの概念を広報し研究成果を精錬していくため、学会や研究集会で本研究結果に関する講演を行った。

研究代表者は科研費よる本研究開始前の 2012 年 8 月に(擬)スキーモイドの概念に到達し、(擬)スキーモイドの圏論的、ホモロジー・ホモトピー論的または表現論的手法による考察を念頭に研究の準備に入っていた。特に AS やコヒレント配置に関する先攻結果の情報を収集しその理解を進めていた。

擬スキーモイドとは組合せ的データにより色付けされた射を持つ小圏 C と考えられ、さらに対称性を記述する自己同型関手を持つものがスキーモイドである。射の集合の色付けによる分割を S とする場合、スキーモイドは対 (C, S) で以下表記される。

研究の初段階において、研究方法として次を計画していた。2013 年度は直ちに研究目的の ⑴、 ⑵ を達成すべく研究を進める。研究 ⑶ 遂行のため、亜群の作る圏 Grp または 小圏が作る圏 Cat のモデル圏構造を利用する方法を検討する。結果としてスキーモイドの適切な圏ででホモトピー論を展開し、⑷ の研究に必要な道具を揃える。

研究⑴では有限群と AS の対応関係の一般化を考察することから、ASmd の定義としては Grp からの関手 E が、埋め込み e : Gr → (AS の圏)の自然な拡張として存在することを要求する。また圏 ASmd に Grp と同値な部分圏を見つけるためには、有限群の場合がそうであるように細スキームの概念を AS 上で一般化する必要がある。AS に付随して現れる Bose-Mesner 代数をスキーモイドの文脈で一般化し AS 理論に現れる交叉数、分岐指数の性質を圏論的に解釈し直すという仕事も要求される。

⑵ の研究でまず考えなければならないのは、スキーモイドの拡大である。幸い群の拡大を一般化し、小圏 C の拡大、すなわち C の分数圏からアーベル群の圏への関手による線形拡大の理論が Baues, Wirsching [1] により与えられている。これをまず利用するのが極めて自然である。(C, S) がスキーモイドであるとき Baues, Wirsching による拡大 q : F → C を考える。q による分割 S を引き

戻してＦの射の分割を定めることは自然であるが、その際、スキーモイドの持つ組合せ的条件をみたすためには、スキーモイド C に適切な条件が必要であろうと予想する。まずこの条件を探ることが研究 (2) の出発点である。また 2 次の Baues-Wirsching コホモロジーにより線形拡大が分類される。よってこの小圏のコホモロジーまたはその亜種を考察することで上述のスキーモイドの線形拡大の分類を議論することが可能になるだろう。
研究 (3) (4) を進めるためには、圏 Cat 上で展開される Hoff、 Lee によるホモトピー論、Baues、Webb、Xu によるホモロジー論が参考になる。そのため、これらの運用・応用手法に注意を払う。
以上の研究方法と予想を踏まえ研究期間 3 年で研究を遂行した。

<参考文献>
[1] H. J. Baues and G. Wirsching, Cohomology of small categories, J. Pure Appl. Algebra 38 (1985),187-211.

４．研究成果
研究の方法で述べたように、2012 年までの考察をもとに 2013 年の年度当初から(1)の問題に取りかかった。スキーモイドの圏 ASmd を作るため射をどのように定めるかがはじめの問題となったが、花木, Zieschang による AS の射の自然な拡張としてそれらを明確に定義した。またスキーモイドの亜種で基点付き細スキーモイドを定義し、それらのなす圏と亜群の圏との同値性を示した。これにより(1)の研究が完成した。
AS の研究で重要な代数的対象は AS のもつ組合せ的データから得られる隣接代数 (Bose-Mesner 代数) である。表現論を圏 ASmd で展開するために、隣接代数のスキーモイド版を定義する必要があった。小圏にクイバー代数を一般化した、所謂、圏代数が付随する。この代数の部分代数として(擬)スキーモイドの Bose-Mesner 代数を定義すことが出来る。Bose-Mesner 代数を作るという操作は AS をスキーモイドと見なす操作と両立するという意味で、この代数の定義は自然なものである。圏論的にはさらに、花木による AS の圏と French による AS と許容写像からなる圏は、それぞれスキーモイドの圏と基本スキーモイドとその間の許容写像からなる圏に埋め込まれるという事実を得た。スキーモイドにその Bose-Mesner 代数を与える対応は、基本スキーモイドの圏から代数のつくる圏への関手を定義することになる。結果として、AS は圏論的にも明確にスキーモイドに組み込まれる。
スキーモイドを作り出すことはその世界を豊かにするという意味でも重要な研究の一つである。これらスキーモイドの構成に関しては２つの方法を与えることに成功した。一つ目は Baues, Wirsching による線形拡大の方法である。擬スキーモイド (C, S) に対して、線形拡大を引き起こす小圏 C からアーベル群のつくる圏への関手に適切な条件を課すことで、(C, S) の擬スキーモイドとしての拡大とその一意性を示すことができた。小圏の拡大と同様、2 次の Baues-Wirsching コホモロジーがやはりスキーモイド拡大を分類することも示した。これにより(2)に研究が完成したことになる。
もう一つは Berger, Leinster による推移的行列から小圏をつくる方法に基づく、スキーモイドの構成法である。これは AS を太らせてスキーモイドを構成する方法であり、この対応は AS の圏からスキーモイドの圏への関手を与えることもわかった。以上の結果はまとめられ論文②として発表された。
(3)の研究の目的は ASmd または擬スキーモイドの圏 qASmd にホモトピー論的考察が可能となる構造を入れることであった。モデル圏構造はその候補ではあったが、より具体的な 2-圏理論の展開可能性を考察することとした。具体的計算にも耐えられる体系を望んだからである。そのため、Hoff、Lee による小圏における強ホモトピー関係を用いてスキーモイドの圏でホモトピー論を展開した。結果として、擬スキーモイドのつくる圏 qASmd には 2-圏の構造が入り、離散スキーモイドを構成する関手により、小圏の圏 Cat はその 2-圏に埋め込まれることがわかった。
さらにホモトピー不変量として、自己ホモトピー同値写像がつくるモノイドをホモトピー関係で割ることで得られる群(自己ホモトピー写像群)を導入した。自明な分割を持つアソシエーションスキーム (X, S)を擬スキーモイドと見なすとき、 その自己ホモトピー写像群は X の濃度が 3 以上ならば巡回群となり、濃度が 2 のときは自明群となることを示した。また有限群から来る、擬スキーモイド上の自己ホモトピー同値写像は結局，同型写像となることがわかる。こうして有限群を AS 経由で Cat の対象と考えた場合は可縮になってしまうが、qASmd の世界では非自明な対象であることがいえる。
亜群から定義されるスキーモイド上のホモトピー関係を詳細に考察することにより、その亜群の自己同型群から亜群から得られるスキーモイドの自己ホモトピー写像群へ単射準同型が存在することを示した。上の主張と合わせ、これらの結果は、Cat では検出できないホモトピー論的性質が、qASmd には存在することを示していることになり、スキーモイド研究において重要な意味を持つ。
一方、スキーモイドの圏 ASmd にも強ホモトピーを定義するため、2 つの対象と唯一の非自明な射を持つ圏に自然にスキーモイドの構造を入れ ASmd 上で強ホモトピーを定義した。このホモトピー関係は結局、恒等関係と同じになるという結果も得ている。こ

れらの結果はまとめられ論文③として発表された。

研究 (4) を進めるために、Quillen のモデル圏構造をスキーモイドに関連する適切な圏に見いだすことを考えた。結果、(代数的)組合せ論とホモトピー論的手法の融合をさらに進めることで、擬スキーモイドからベクトル空間へのある部分関手圏 Funct が、Quillen のモデル圏構造経由でホモロジー代数、導来圏、三角圏の理論を上手く展開出来る圏を造り出すことがわかった。

実際、この部分関手圏 Funct はアーベル圏であることがわかり、さらに従順スキーモイドの場合には Funct に関して Mitchell の埋め込み定理が成立する。加えて Funct は、その従順スキーモイドの Bose-Mesner 代数の加群圏と圏同値になるという結果を得た。こうして、擬スキーモイド (C, S) から従順スキーモイドへ qASmd 上の射がある場合、Kan、Hirschhorn のコファイブラントリー生成モデル圏構造の右随伴関手による引戻しにより、(C, S) に同伴する Funct 上のチェイン複体の圏にモデル圏構造を導入することができる。こうしてスキーモイドに対して、三角圏、ホモトピー代数まで展開出来る圏を得たことになる。

また関手圏 Funct を用いて、qASmd の圏に森田同値の概念を導入できる。具体的な考察の結果、階数 n の 2 進コードが作る Hamming スキームをスキーモイドと考えた場合、それは次数２の巡回群から来るスキーモイドと大きさ n に関係なく、森田同値となることがわかった。群から得られる AS と群からは得られない Hamming スキームがより大きな体系、スキーモイドの圏では比較可能という、興味ある結果を得たことになる。一般にスキーモイドの分類に関する結果を導き出すのは難しいと考え(4)では代数の分類に目を向けた。しかし上述のように、擬スキーモイドそのものを扱う定理が得られたことになり、そのスキーモイド研究における意義は大きい。

さらに上述の Quillen のモデル構造を用いて定義される Ext 群がスキーモイドの森田同値に関する不変量を与えることがわかる。これら結果は論文①にまとめられ、 Journal of Algebra から発行される予定である。

論文①の付録では、適切な poset に擬スキーモイド構造が入ることを示している。結果として抽象単体複体 K には、このタイプの擬スキーモイド構造が入り、さらにその Bose-Mesner 代数は複体 K に付随し現れる Stanley-Reisner 代数と綿密に関連するという結果も得た。すなわち、代数的組合せ論で重要な２つの代数がスキーモイドの圏で関連づくことになる。

以上、この研究期間でスキーモイドの基本的な性質を、ホモトピー論的または圏表現論的に解明出来たと考えている。

本科研費をその一部に当て開催した研究集会「(非)可換代数とトポロジー」(2016 年 2 月 20 日-2 月 22 日)や信州トポロジーセミナーの参加者の方から本研究を進める上で多くの助言を頂いた。皆さんに感謝したい。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３　件）

① Katsuhiko Kuribayashi and Yasuhiro Momose, On Mitchell's embedding theorem for a quasi-schemoid, Journal of Algebra (掲載確定). 査読有
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.03.019

② Katsuhiko Kuribayashi and Kentaro Matsuo, Association schemoids and their categories, Applied Categorical Structures, 23 (2015), 107-136. 査読有
DOI: 10.1007/s10485-013-9327-6

③ Katsuhiko Kuribayashi, On strong homotopy for quasi-schemoids, Theory and Applications of Categories, 30 (2015), 1-14. 査読有

〔学会発表〕（計　２　件）

(1)栗林 勝彦，擬スキーモイドの Mitchell 埋め込み定理について，2016 年度 日本数学会年会 代数学分科会 2016 年 3 月 16 日，筑波大学

(2)栗林 勝彦，擬スキーモイドの強ホモトピー，2014 日本数学会 秋季総合分科会 応用数学分科会 2014 年 9 月 25 日，広島大学

〔その他〕

ホームページ等

http://marine.shinshu-u.ac.jp/~kuri/home.html

６．研究組織

(1)研究代表者

栗林 勝彦（KURIBAYASHI, Katsuhiko）
信州大学・学術研究院理学系・教授
研究者番号：40249751

(2)研究協力者

松尾 健太郎（MATSUO, Kentaro）

百瀬 康弘（MOMOSE, Yasuhiro）

花木 章秀（HANAKI, Akihide）
信州大学・学術研究院理学系・教授
研究者番号：50262647

沼田 泰英（NUMATA, Yasuhide）
信州大学・学術研究院理学系・准教授
研究者番号：00455685