様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号： １３９０１
研究種目： 挑戦的萌芽研究
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５６１０００４

研究課題名（和文） 微分ガロア理論の量子化

研究課題名（英文） Quantization of Galois theory

研究代表者

梅村　浩（Umemura, Hiroshi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：４００２２６７８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：微分ガロア理論は，1次元加法代数群のなすHopf代数のmodule代数の理論とみなすことができる．この立場から，Hopf代数の専門家は余可換Hopf代数を作用域とする可換環上の線形方程式のガロア理論を一般的に扱うのに成功した．これを非可換化すること，つまり量子化することは困難な問題であった．
我々は非戦形微分方程式のガロア理論の研究から生じたガロア鞘の概念を用いて，定数係数の線形方程式の一般の量子ガロア理論を確立した．

研究成果の概要（英文）：We can interpret differential Galois theory as a theory of Module algebras under the Hopf algebra of the co-orrdinate ring of the 1 dimensional additive group. Hopf algebraists succeeded in generalizing the theory of linear equations from this view point, to a co-commutative Hopf algebra acting on a commutative module algebra. There arises a natural question whether we can extend this general theory to non-commutative case, or we can quantize it. Using the notion of Galois hull born in our study of Galois theory of non-linear differential equations, we successfully established a general Galois theory of non-commutative linear equations with constant coefficients.

研究分野： 代数幾何学

キーワード： Picard-Vessiot 理論　量子ガロア理論　Hopf 代数

１．研究開始当初の背景

研究を始めるにあたって次の三つの成果があった．

（A）Hopf 代数の理論

Hopf 代数理論の基礎を築き，その発展に大きな貢献をした Sweedler は既に５０年ほど前に，Hopf 代数を使って Galois 理論を系統的に一般化するアイディアを持っていたと思われる．この思想を実現したのは，筑波学派の Hopf 代数の専門家である竹内光弘・増岡彰・天野勝利である．

Hopf 代数理論を使って，例えば微分 Galois 理論を展開するには，先ず微分環は，１次元加法群の座標環のなす Hopf 代数の module 代数にほかならないことに注目する．さらに微分加群も Hopf 代数の左加群としてとらえられる．このようにして，Picard-Vessiot 理論と呼ばれる線形微分方程式の Galois 理論が Hopf 代数の言葉で記述できる．これは既存の理論，Picard-Vessiot 理論の単なる言い換えではない．

何故なら，次に例えば差分方程式を扱う場合には，加法群を乗法群で置き換えればよい．こうすれば，線形微分方程式の Galois 理論と線形差分方程式の Galois 理論を完全に並行して論ずることができるのである．

そうなれば，Hopf 代数の専門家の視点からすれば，さらなる一般化が自然に望まれるのは当然である．実際，竹内・増岡・天野は Picard-Vessiot 理論の一般化をさらに推し進めた．つまり，一言で言えば，作用素のなす Hopf 代数として，任意の Hopf 代数を考えようとしたのである．

しかし，そうすることは本質的に非常に困難な問題を含んでいる．Hopf 代数が余可換でなくなると，非可換幾何学の世界に突入し，可換環論＝代数幾何学の慣れ親しんだ世界とは全く異なる未知の風景が展開する．

そういう理由で，これまで Hopf 代数の専門家が主として考察したのは次の制限のもとである．作用を受ける環，つまり関数環は可換環であり，その上に作用する作用素環である Hopf 代数は余可換であると仮定する．Picards-Vessiot 理論を拡張するのであるから，考察される関数方程式は線形であるとする．このような条件のもとで彼らは Picard-Vessiot 理論を一般化するのに成功した．

（B）q 類似とは何か．

数学には q という文字がしばしば登場する．それはアルファベットに，わずか 26 文字しか存在しないのが原因かもしれないが，それだけとは思えない不思議な現象である．

(1) q 類似の q.
(2) 有限体に含まれるの元の個数 q.
(3) 楕円関数論に現れる $q=\exp(2\pi i\tau)$.
(4) 量子力学 (Quantum Physics) の頭文字 q.

これらに出現する文字 q の間に先験的に関係はない．例えば(1)の歴史的な最初の例の一つは Heine による q 超幾何級数であるが，これは非可換幾何学(4)とも楕円関数論(3)とも何の関係もない．

しかし，(1)に属する Euler の３重公式が，後に Jacpbi によって楕円関数論から自然に導かれたことが示すように，(1)と(3)は無関係ではないのである．

(1)q 類似と(2)数え上げの間にも，深い関係が存在する．

量子力学(4)は数学的に表現すれば非可換幾何学である．

この方面の発見で著しいものの一つに，野海正俊による超幾何関数の量子化の仕事がある．超幾何級数の q 類似はそれまで，(1)の枠組みの中で考察されてきた．

野海は Gelfamd によるグラスマン多様体を使った超幾何級数の一般化に注目した．彼はそのために，超幾何関数の定義される空間であるグラスマン多様体を量子化する．あるいは座標環が非可換環となったグラスマン多様体を構成する．

そのような多様体は確かに存在することを証明する．その上に表現論的に超幾何差分方程式を構成する．特別な場合にその解は，それらが古典的に知られた，Appell-Lauricella 差分超幾何級数であることを示した．

これは素晴らしい業績であるが，また不思議な仕事でもある．探検隊はいい所まで踏み込んだけれども，謎の獲物を生け捕らずに帰ってきてしまったようにも見える．

何故なら，得られた結論が通常の，つまり量子化されていないグラスマン多様体の上で定義される関数であるならば，グラスマン多様体の量子化を考察した意義はどこにあるのだろうという疑問が湧く．

例で例えれば，非常に高度な３D プリンターを発明しながら，それを使って平面図形のみ印刷しているような印象を持つことも事実である．

(C) 非線形常微分方程式の Galois 理論

Galois による代数方程式の Galois 理論が世に認められるようになると，この素晴らしいアイディアを微分方程式に応用したいと考えた人たちがいた．最も深刻にこの問題に取り組んだのは，Sophus Lie であった．彼は Lie 群論も Lie 環論もそのために開発した．しかし，解析学に属する微分方程式の Galois 理論は本質的に無限次元の理論であり，有限次元の理論から用意しなければならい当時としては，さぞかし大変だったと思われる．

１９世紀の終わりに，Picard は線形常微分方程式の Galois 理論を完成した．これは有限次元の理論であって，Lie が目指していた対称性を記述する Galois 群が無限次元となる一般の場合とは異なる．

２０世紀になると，Kolchin は当時開発された Weil の代数幾何学の言葉を用いて，有限次元の場合の微分方程式の Galois 理論を完成した．

Lie の目指していた無限次元の微分方程式の一般 Galois 理論については，１９世紀の終わりに，J.Drach が一つの理論を提出した．

しかしこの仕事は，不完全な定義や，証明を含むものであって，Vessiot はこれを完全なものとするのに多大な時間を使った．

１９世紀の終わりから２０世紀の初めにかけて，一般 Galois 理論は盛んに研究されていたが，次第にあまり研究されなくなり，やがて忘れられてしまった．

Drach と Vessiot の埋もれてしまっていた業績に我々を目覚めさせたのは，J.-F. Pommaret の著作であった．

この著作は埋もれていた遺産に注目を集めることに成功したという点では画期的なものであったが，数学的内容については多くの問題を含んでいた．不完全な定義，誤った結論など Drach と Vessiot の遺産を整理し，その価値を現代数学に位置づけるものではなかった．

申請者は１９８０年代に名古屋大学で Pommaret の講演を聴いてから，この分野の
重要性と先人たちの残した遺産に注目し，一般 Galois 理論の研究を開始した．それから約１０年後に成果を論文にして発表した．日本国内ではあまりり注目されなかったが，海外では評価を受けた．

この仕事は Vessiot の最後の論文の一つを発展させたものである．基礎になる技法は代数幾何学の概型の理論である．

我々の理論は次のように進行する．
常微分体の拡大 L/K が与えられたとする．但し抽象体 L は K 上有限生成であると仮定する．このような微分拡大体を考えることは，K 係数の線形とは限らない代数微分方程式を考えることに他ならない．これ対してその Galois 群を定義しなけれならない．

そのために大切なステップはこの拡大体 L/K から，その正規化に相当する Galois hull と呼ばれる編微分環の拡大 S/R を構成することにある．この編微分環の拡大 S/R は代数的な Lie 擬群であって，与えられた微分方程式の解のなする力学系を含む最小のものとみなせる．この擬群から引き出せる群構造が与えられた常微分体の拡大 L/K の Galois 群である．

２．研究の目的

上の背景に上げた三つの理論を基礎として，その上に Galois 群が量子群となるような量子化された Galois 理論を樹立することである．

３．研究の方法

数学的には量子群論，非線形微分方程式の Galois 理論の構築で導入された代数理論の技法が骨格をなす．名古屋大学多元数理科学研究科で毎週『代数幾何学と微分方程式論』のセミナーを開催した．

超幾何級数の q 類似とグラスマン多様体の量子化について議論するため神戸大学の野海正俊を訪問した．
さらに Hopf 代数の専門家である筑波大学の増岡彰を筑波大学に訪問し，我々の理論を Hopf 代数論の立場から透明なものとした．

４．研究成果

背景に述べた(A)，(B)，(C)の基礎の上に，一般の量子群を作用素環にもつ，定数係数線形方程式の Galois 理論を作るのに成功した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　4　件）

(1) Hiroshi Umemura: Can we quantize Picard-Vessiot Theory? Univ. Paul Sabatier, Toulouse, France, 2013/9/04, Colloque en honneur de J.-P. Ramis.

(2) Hiroshi Umemura: Toward quantization of Picard-Vessiot theory, Model theory, Differential equations, Galois theory and Applications, CIREM, Marseille, France, 2015/5/13.

(3) Hiroshi Umemura: Toward quantization of Picard-Vessiot theory, Univ. Paris Jussieu, Seminaire Darboux, 2015/5/23.

(4) Hiroshi Umemura: Toward quantization of Picard-Vessiot theory. Mini-Conferences on Hopf algebras and Galois theory, Tsukuba Univ. 2015/9/13.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
梅村浩　(Umemura Hiroshi)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：40022678

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：