

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610006

研究課題名(和文)群作用に基づく確率過程・統計分布研究と表現論の新展開

研究課題名(英文) A new development of studies on stochastic process, statistical distributions and representation theory

研究代表者

若山 正人 (Wakayama, Masato)

九州大学・学内共同利用施設等・教授

研究者番号：40201149

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：1987年のEriksenによる多変量正規モデルの測地線のミステリアスな導出に対し、群作用による理解を目標としたが、指導下の博士課程学生である井上公人がリーマン対称錘の沈め込みを用いて解決した。これは一般の楕円型モデルに対しても新しい示唆を与える。また、確率分布由来で定義された、行列式の表現論から定まる対称群のリース積と一般戦型群の相対不変式となるリース行列式を用いた群-部分群行列式の研究を行った。さらに、Lévy過程の一種である Meixner-Pollaczek 過程の多変量化に必要な多変数 Meixner-Pollaczek 多項式の理論を対称錘上の調和解析の枠組みで構築した。

研究成果の概要(英文)：The first theme of the project was to understand, by employing a suitable group action, the mysterious derivation/determination of geodesics on multivariate normal models given by Eriksen in 1987. This was completely achieved by Hiroto Inoue, a PhD course student under my supervision. Actually, he proved that the normal model can be realized as a submanifold of a certain (pre-conjectured) Riemannian symmetric space (cone) by Riemann submersion and the mysterious derivation of geodesic follows from this fact. This result may provide a new understanding for the elliptical models including normal models. The second is expanding the representation theoretic study of  $\Delta$ -determinant, which was originally defined in the framework of statistical and probability theory, we explored the group-subgroup determinant theory. Moreover, as the third theme, we obtain the fundamental results of multivariate Meixner-Pollaczek polynomials in the framework of harmonic analysis on Hermite symmetric spaces.

研究分野：表現論

キーワード：群作用 統計(情報)多様体 Meixner-Pollaczek過程 行列式 正規分布モデル 群行列式 対称錘

## 1. 研究開始当初の背景

統計多様体に対する群作用・群構造を考察する研究は行われていなかった。全ての統計多様体に非自明な群の作用があるわけではないが、正規モデルなどは自然なものをもつことがわかっていた。また、元来、統計学・確率論から現れた  $\alpha$  行列式の表現論の展開を始めたばかりであった。さらに、多変数の Levi 過程のひとつである Meixner-Pollaczek 過程の構築の研究が待たれていた。

## 2. 研究の目的

本研究課題では、確率論・統計学における以下の 3 問題に対する表現論による解決と新しい問題の開拓を目指す。

I. 楕円型分布モデルなどの統計多様体の測地線の群作用による記述と典型的モデルのリーマン対称性の探求。さらに群作用をもつ統計モデルに対応する軌道推定理論の構築を目指す。

II. 行列式の正值性問題とそれに基づく確率過程構成問題への帯球関数・表現論からの研究。

III. 管状型エルミート対称空間上で定式化され多変数直交多項式系を定める Meixner-Pollaczek 多項式の理論に基づく時間・空間的多変数 Levi 過程の構成と、関連する不変式論の展開。

## 3. 研究の方法

$l: n(>1)$  次元の正規分布モデルは、リーマン対称空間 ( $S_0(n+1, n)/S_0(n) \times O(n)$ ),  $Sp(n, R)/U(n)$ ) の可微部分多様体と考えられるが、フィッシャー情報量から定義されるリーマン計量は、それら対称空間の標準的な計量とは異なる。しかしながら、平均が 0 の分布全体がなすモデルを考えると、それは測地的部分多様体となり、指数写像から測地線が求められる。一方、Eriksen(1987)の計算によると、適当な意味でブロック分けをした行列の指数写像の対応ブロック成分の一部から、測地線が取り出せることが分かっている。この点を群論幾何学的に明らかにする。

## 4. 研究成果

平成 25 年度は、以下について考察した。 $n(>1)$  次元の正規分布モデルは、リーマン対称空間 ( $S_0(n+1, n)/S_0(n) \times O(n)$ ),  $Sp(n, R)/U(n)$ ) の可微部分多様体と考えられるが、フィッシャー情報量から定義されるリーマン計量は、それら対称空間の標準的な計量とは異なる。しかしながら、平均が 0 の分布全体がなすモデルを考えると、それは測地

的部分多様体となり、指数写像から測地線が求められる。一方、Eriksen(1987)の計算によると、適当な意味でブロック分けをした行列の指数写像の対応ブロック成分の一部から、測地線が取り出せることが分かっている。この点を  $n=2$  のときは完全に、 $n>2$  においても部分的ではあるが群論幾何学的な理解を深めた。

平成 26 年度は、正規分布モデルや  $t$ -分布、コーシー分布などを含む統計多様体の重要例である楕円型モデルに関し、測地線の明示的記述にお観点からの研究方向を定めるとともに、より、(フィッシャー情報量から定まる)リーマン対称空間・等質空間による定式化など、群論幾何学的記述を目指した。さらに、このような統計多様体をモデルとした新しい調和解析・数論の研究対象(統計分布間の推移性などの考察も含め)を見いだした。多変数 Meixner-Pollaczek 多項式の一般化の記述(それらが満たす差分方程式系の記述を始め直交性、母関数、行列式表示など)を確立した(J. Faraut との共同研究)。パラメータの多変数化を、被覆群の表現論的観点から進めてきた(未完成)。変数の多変数化により、レビ過程の重要例である Meixner-Pollaczek 過程(現時点では一変数のみしか定義されていない確率過程)の時間変数の多変数化が望め、パラメータの多変数化により空間変数の多変数化が期待できるため、その方針で研究を進めた。

平成 27 年度は、多変数正規分布モデルや  $t$ -分布、コーシー分布などを含む統計多様体の重要例である楕円型モデルに関し、測地線の明示的記述の観点からの研究方向を定めるとともに、その微分幾何学的研究に挑んだ。このことは、このような統計多様体がなすリーマン等質空間のリーマン対称空間への埋め込みに関する研究を促すことになったが、本研究期間中には決定的な成果は得られなかった。ただし一方で、正規分布モデルに関しては、この方向の研究を博士後期課程の学生である井上公人が進め、Eriksen の 1987 の論文に触発され、研究代表者らが 2011 年に特別な場合の考察を行い open problem としていた問題である、正規モデル上の測地線の初等的だが mysterious な Eriksen の構成について、その意味をリーマン対称空間(とくに対称錘)の Riemann submersion を用いて明らかにした。また、多変数の Meixner-Pollaczek 多項式をエルミート対称錘の枠組みで構成、その性質を明らかにし、レビ過程の一つである、多変数 Meixner-Pollaczek 過程(空間変数、時間変数ともに多変数となる)の研究の土台を築いた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

〔雑誌論文〕(計 8件)

Masato Wakayama, Simplicity of the lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillators and the Riemann scheme of a certain Heun's differential equation, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, Vol.89, pp.69-73, 2013. DOI:10.3792/pjaa.89.69

Jacques Faraut, Masato Wakayama, Invariant differential operators on the Heisenberg group and Meixner-Pollaczek polynomials, Advances in Pure and Applied Mathematics, Vol.4, pp.41-66, 2013.  
DOI: 10.1515/apam-2013-0204

Masato Wakayama, A Lie theoretic proposal on algorithms for the spherical harmonic lighting, Series: Mathematics for Industry, Vol.4, pp.43-54, 2014.  
DOI: 10.1007/978-4-431-55007-5\_7

Masato Wakayama, Remarks on quantum interaction models by Lie theory and modular forms via non-commutative harmonic oscillators, Series: Mathematics for Industry, Vol.5, pp. 17-34, 2014.  
DOI: 10.1007/978-4-431-55060-0\_2

Masato Wakayama, Taishi Yamasaki, The quantum Rabi model and Lie algebra representations of  $sl_2$ , Journal of Physics A:Mathematical and Theoretical, Vol.47, pp. 1-17, 2014.  
DOI: 10.1088/1751-8113/47/33/335203

Kei Hamamoto, Kazufumi Kimoto, Kazutoshi Tachibana, Masato Wakayama, Wreath determinants for group-subgroup pairs, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol.133, pp. 76-96, 2015.  
DOI: 10.1016/j.jcta.2015.02.002

Jacques Faraut, Masato Wakayama, Hermitian Symmetric Spaces of Tube Type and Multivariate Meixner-Pollaczek Polynomials, Mathematica Scandinavica, (to appear)

Masato Wakayama, Equivalence Between the Eigenvalue Problem of Non-Commutative Harmonic Oscillators and Existence of Holomorphic Solutions of Heun Differential Equations, Eigenstates Degeneration, and the Rabi Model, International Mathematics Research Notice, pp. 759-794, 2016.

DOI: 10.1093/imrn/rnv145

〔学会発表〕(計 21件)

Masato Wakayama, "Analysis and Number Theory for Non-commutative Harmonic Oscillator", Distinguished Lecture Series, 2013年04月22日~26日, Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington

Masato Wakayama, "Hankel actions, holomorphic discrete series and Meixner-Pollaczek polynomials.", JSPS-NWO Seminar Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces, 2013年8月28日, 名古屋大学

若山 正人, "Problems around  $NcH0$ ", 表現論がつなく数学, 2013年09月28日, ひめぎんホール別館・第20会議室

若山 正人, "Spectrum of non-commutative harmonic oscillators-number theory, representation theory and Fuchsian equations", Mathematical Quantum Field Theory and Related Topics, RIMS, 2013年10月03日, 京都大学

若山 正人, "Quantum Interaction Models and Number Theory", Zeta Functions in OKINAWA 2013, 2013年10月19日, 沖縄コンベンションセンター

若山 正人, "A Lie theoretic proposal on algorithms for spherical harmonic lighting", Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis, 2013年10月22日, 九州大学医学部 百年講堂

若山 正人, "Residual modular forms and curves, the quantum Rabi model, and discrete series representations from the study of spectral zeta functions of the  $NcH0$ ", Geometric zeta functions and related topics, 2013年10月31日, 佐賀大学

Masato Wakayama, "Spectrum of non-commutative harmonic oscillators - Modular forms, representation theory and the Rabi model", colloquium, 2013年11月29日, Mathematical Institute, Leiden University

Masato Wakayama, "An application of Lie theory to computer graphics via spherical harmonics", Berliner Colloquium für wissenschaftliche

Visualisierung, 2014年02月28日,  
Zuse-Institut Berlin (ZIB), Germany

若山 正人, “Non-commutative harmonic oscillators and the Rabi model”, RIMS 研究集会, 2014年06月24日, 京都大学

Masato Wakayama, “An introduction and application of Lie theory - a theme from spherical harmonics”, Seminar for undergraduates, 2014年09月03日, University of Hawaii

Masato Wakayama, “Quantum Rabi's model and non-commutative harmonic oscillators-between number theory and physics”, Colloquium, 2014年09月05日, University of Hawaii

若山 正人, “Quantum Rabi's model and non-communicative harmonic oscillators”, 数理解析研究所研究集会, 2014年10月07日, 京都大学

若山 正人, “Lie Algebra Representations and the Quantum Rabi Model - A View from Non-Communicative Harmonic Oscillators and Heun ODEs”, Mathematics and Physics of Interacting Quantum Systems, 2014年10月24日, 九州大学

若山 正人, 「量子相互作用モデルと数論」, 橋爪道彦先生退職記念研究集会, 2015年02月15日, 岡山理科大学

Masato Wakayama, “Quantum Rabi's model and representation theory”, Department of Mathematics(招待講演), 2015年02月25日, University of Bologna

若山 正人, “Spectrum of the quantum Rabi model and representation theory”, Probabilistic models with determinantal structure, 2015年04月30日, 九州大学

若山 正人, 「量子ラビ模型・非可換調和振動と数論・表現論」, RIMS 研究集会「表現論および関連する調和解析と微分方程式」, 2015年06月25日, 京都大学

Masato Wakayama, “Mathematics for Industry and Industry for Mathematics”, ICIAM2015, 2015年08月12日, China National Convention Centre

Masato Wakayama, “Endeavors for Mathematics for/in Industry in Japan”, Industrial Mathematics Awareness Week, 2015年10月22日, COEX Hall

② 若山 正人, 「産業に息づく数学と数学研究」, 第67回白石記念講座, 2015年11月13日, 早稲田大学

〔その他〕  
ホームページ等  
若山正人ウェブサイト  
<http://imi.kyushu-u.ac.jp/~wakayama/>

九州大学研究者情報(若山正人)  
<http://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K000521/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

若山 正人 (WAKAYAMA MASATO)  
九州大学・マシナリー・インダストリー研究所・教授  
研究者番号: 40201149