3版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2013～2015
課題番号：２５６１００１５
研究課題名（和文）幾何学の量子化：非可換場の理論へ向けて

研究課題名（英文）Quantization of Geometry: A trial for the construction of non-commutative field theory

研究代表者
前田　吉昭（MAEDA, YOSHIAKI）

東北大学・知の創出センター・特任教授(研究)

研究者番号：４０１０１０７６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：変形量子化の手法を応用して非可換場の理論の構築への挑戦的研究を行った。特に、厳密変形量子化が深く関わることが明らかになり、非可換対称空間の余接作用による厳密変形量子化による構成、非可換ゲージ理論の構成等を行った。また、一方で、無限次元多様体（ケーラー多様体）の変形量子化や非可換幾何学を推進するために、特にループ空間の幾何学について研究を進めた。ループ空間の特製類を定義し、5次元多様体の微分可能同型群の基本群の非自明性についての応用をえることができた。

研究成果の概要（英文）：This study is a challenge for constructing a field theory from a non-commutative geometrical point of view. The original idea for this study is to use the deformation quantization, in particular, our advantage is to use the non-formal deformation quantization. By using this, we construct the non-commutative gauge theory on 4-manifolds. Other topic we have worked is to study infinite dimensional categories of deformation quantization via psued differential operators. In particular, we construct characteristic classes for loop space by using the regularization method. As an application, we showed the non-triviality of the fundamental group of the group of diffeomorphisms of 5 dimensional compact manifolds.

研究分野：微分幾何学

キーワード：変形量子化　超弦理論　ケーラー多様体　非可換ゲージ理論　量子場理論　素粒子物理学　国際交流ベルギー

１．研究開始当初の背景
多様体論を典型として、従来の幾何学は「点集合」を元に幾何学的理論や手法を開発してきたといえる。関数、ベクトル場等の微分形式等の幾何学的対象物は、空間（多様体）の「点」を元に定義されており、これらが多様体論の基礎概念を支え、その幾何学を発展させてきた。一方で、物理学は、その後量子論に大きく考えを変えている。量子論の基礎となる考え方は、ある意味では「点」を基礎としない概念で構成されている量である。この物理学に呼応する数学として非可換幾何学が挙げられる。本研究代表者は、変形量子化の方法の立場からの非可換幾何学の構築を進めてきた。その中でも、変形量子化の収束性と普遍変形公式(UDF)の研究についてこの数年間で飛躍的な成果が得られた。例えば、複素領域や複素シンプレクティック多様体での収束性のある変形量子化には、齟齬のある幾何学的対象物(ジャーブ)が現れることが分かり、普遍変形公式(Universal deformation formulae, UFD)の構成では、局所コンパクト量子群に対する厳密Drinfel'd ツイストの公式の構成が成功した。これらの手法は、双曲多様体や対称空間のUFDの具体的な構成にも有効である。このような実績ある変形量子化の手法を用いて、さらなる発展として、「非可換」ゲージ理論や「非可換」場の理論への期待が持たれている。

２．研究の目的
本研究代表者は、変形量子化理論の手法を用いた非可換幾何学の構築を推進してきたが、それを発展させて、その最終的目標である場の量子論への挑戦を行いたい。数学および物理学のなかで共形場理論・位相場理論、非可換ゲージ理論、超弦理論等、その兆候が表れていると考えられるが、これらを含む場の理論を変形量子化の立場から統一的に理解をすること、さらにはより発展させた非可換場の理論の構築を目指す。本研究の基幹となる1)変形量子化問題（特に非可換積の収束性）を場の理論に用いられるような設定を行うこと、2)次数つきポアソン構造と無限次元ポアソン構造の量子化問題を扱い、非可換場の理論として、3)非可換モジュライ空間とその非可換不変量、4)ディラック構造や一般幾何学(generalized geometry)の量子化問題と T 双対性問題、5)ループ空間の幾何学と regularized チャーンクラス、6)フロベニウス代数・圏論・オペラドとコホモロジー的場の理論、7)超ケーラー多様体と量子BCOV理論、に重点において研究を行う。

３．研究の方法
本研究では、実績を重ねてきた変形量子化理論による非可換幾何学の構築をさらに進め、最終的目標である量子場の理論の幾何学化（非可換化）を目指す。共形場や位相場理論、ビラゾロ代数の表現論、量子コホモロジー、非可換ゲージ理論、超弦理論等、幾何学および物理学においてその兆候が表れていると考えられるが、統一した考え方や方法論が確立しているわけではない。本研究では、この新しい流れに向かうために、次数つきポアソン構造と無限次元ポアソン構造に対する変形量子化の構成を行う。その典型的な例として、ポアソンシグマモデルの量子化について数学的厳密性から行う。また、ループ空間の自然な（無限次元）ポアソン構造に対する変形量子化問題を考察する。ループの積の結合アノマリーの問題、指数定理とチャーン類の定義を擬微分作用素バンドルの幾何学として構築していく。ここでは、特に発散の問題をWodzickiトレースの手法を取り入れて解決を図る。この２つの基盤的研究をもとに、非可換場の理論を意識した研究を連携研究者および海外研究協力者とともに行う。3)非可換モジュライ空間の研究と非可換不変量の研究を、Non-formal deformation quantizationを用いて、非可換球面や非可換双曲空間に対する非可換モジュライ空間の構造を調べることと非可換渦数や非可換インスタントン数の研究について佐古と行う。4)ループ空間の不変量・指数定理、量子化問題について、ボストン大学Steven Rosenberg氏との共同研究を行う。5)ディラック構造や一般幾何学(generalized geometry)の量子化問題とT対称性、ミラー対称性、次数つきシンプレクティック多様体の量子化と位相場の理論の研究を池田と行う。また、ボストン大学KimuraやLiおよび香港大学Wuと6)フロベニウス代数・圏論・オペラドによるコホモロジー的場の理論、7)超ケーラー多様体と量子BCOV理論、Gukov-Wittenによるミラー対称性による量子化問題について共同研究を行う。

４．研究成果
本課題の現在までの進展は、無限次元空間の特製類の構成である。無限次元空間の特製類の構成では、擬微分作用素の理論を活用し、特にループ空間の上の特製類の構成に成功した。その結果として、５次元佐々木空間の微分可能同相写像の空間の基本群の自明性を示すことができた。この結果や手法が超弦理論との関係に言及できる可能性を持っており、理論物理学の研究者との討論を重ねている。厳密量子化問題では、シンプレクティック作用のモーメント写像の非可換化と対称空間の厳密変形量子化の構成に見通しをつけることができた。これをさらに広げ、場の理論の非可換化へ応用する試みを進めている。非可換ゲージ理論については、等質空間の非可換化およびその非可換ゲージ理論の一般化について、成果を上げることができた。
分担研究者である佐古氏との共同研究で,

で変形量子化を用いた，可換な空間におけるインスタントン解から非可換変形した解を構成する方法が発見され，その結果として非可換４次元ユークリッド空間上で曲率の積分で定義されるインスタントン数が変形されないことも示されていた（Maeda, Sako, J.Geom.Phys. 58 (2008) 1784）．本プロジェクトでは，まずこのインスタントンを伴う Dirac 作用素に対する指数定理とグリーン関数も構成さし，これらを用いてNが２以上のU(N)ゲージ理論に対して ADHM データと非可換インスタントンとの１対１対応も証明することができた（Maeda, Sako, J.Math.Phys.53(2012) 022303 ）．これによって４次元ユークリッド空間に関しては一応の完成とし，引き続きより一般の場合に非可換多様体ゲージ理論の場合へと研究を進めた．

Connes らによる作用素環の方法の他に，本研究で用いられている変形量子化を用いる方法がある（前田，佐古,「幾何学の量子化」サイエンス社 2012 年）．滑らかな関数のの形式冪級数の代数に定義される積をスター積と呼ばれる積に変形することで結合的ではあるが非可換にする方法である．変形量子化の利点は，微分幾何学的な手法を残したまま非可換幾何を構築できる点であるが，弱点として一般に対象が形式冪級数であることと，スター積の存在が保証されていても具体的表式が得られる計算可能な例が多くなかったことである．具体的なスター積を用いて、インスタントン解やゲージ理論が構築することは課題であった。これを変形量子化で非可換ケーラー多様体を構成する方法が発見された（ Karabegov, Commun.Math.Phys. 180(1996)745）．その方法と多様体の対称性を用い，複素射影空間および４元数射影空間について完全に具体的なスター積が構成でき、さらに一般の局所対称空間に関する研究も現在進行中である．こうして計算可能な非可換ケーラー多様体を手に入れることに成功したことを用いて、非可換げーージ理論の構築を行った。実際，非可換な等質ケーラー多様体においては，可換極限で通常のヤンミルズ理論を含むようなゲージ理論が構築された（Maeda, Sako, Suzuki, Umetsu,J.Math. Phys.55 (2014) 092301）．また，インスタントンなどの BPS 方程式を議論するためには，形式冪級数のままでは正値性などが言えないこともあり難しい．したがって，構成されたスター積と対応が付くような代数表現を付けることで，有限な値をもつ理論を構築できる．これによってオイラーラグランジュ方程式や BPS 方程式の導出などが可能となった。複素１次元（実２次元）多様体にも関わらず，ユークリッド空間の場合の３次元モノポール方程式が得られたり，複素２次元（実４次元）空間に対してユークリッド空間における８次元インスタントンに対応する BPS 方程式が得られるなど非常に発展が期待できるが、これらは今後の問題でもある。

これらの研究を通して、物理学と幾何学との国際連携研究とその研究ネットワークが構築されつつある。本研究では、幾何学の量子化という全く新しい着想を独自に開発してきた変形量子化の手法による構築を進めている。非可換幾何学という今までにはないアプローチで幾何学を塗り替えることが大きな特色になる。また、無限次元を扱う際の発散の問題の解決のために Renormalization の手法も与えることで、幾何学の中に解析手法を提供した。多くの研究は素粒子論や整数論や代数幾何学といった数学の他分野の研究者、海外の研究者との連携によって行われることから、数学をより広く、また国際性豊かな研究へと進化させることが可能となった。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

1. Y.Maeda,S.Rosenberg,F.Torres-Ardila, The geometry of loop spaces II: characteristic classes. Adv. Math.287(2016),485-518.（査読付）

2.Y.Maeda,S.Rosenberg,Traces and characteristic classes in infinite dimensions. Geometry and analysis on manifolds,Progr.Math.308(2015), 413-435.（査読付）

3.Y.Maeda,S.Rosenberg,F.Torres-Ardila, The geometry of loop spaces I:Hs-Riemannian metrics,Internat. J. Math.26(2015),26 pp.（査読付）

4.A.Larraín-Hubach,Y.Maeda, S.Rosenberg,F.Torres-Ardila, Equivariant, string and leading order characteristic classes associated to fibrations,J.Geom. Phys.79(2014)34-52.（査読付）

5.H.Omori,Y.Maeda,N.Miyazaki, A.Yoshioka,Deformation of expressions for elements of an algebra,Symplectic, Poisson, and noncommutative geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 62,(2014) 171-209. （査読付）

6.Y.Maeda,A.Sako,T.Suzuki,H.Umetsu, Hiroshi,Gauge theories in noncommutative homogeneous Kähler manifolds,J. Math. Phys.55(2014), no. 9, 17 pp.（査読付）

〔学会発表〕（計４件）

1. Y.Maeda, Non-formal star exponentials on contracted one sheet hyperboloid, Conference on Geometry, Topology and Physics,(招待講演)(国際会議), December 26-29, 2015, National Center for

Theoretical Science, Hsinchu(Taiwan).
2. Y.Maeda, Geometry of loop spaces, Workshop in Differential Geometry, (招待講演)(国際会議)September 17-19, 2015, Free University of Bruxelles(Belgium).
3.Y.Maeda,Wodzicki-Chern-Simons classes for loop spaes, Colloquim at Tohoku University(招待講演), July 7, 2014, 東北大学（宮城県仙台市）
4.Y.Maeda, Star representations of SL(2,R), Trends in Geometry, Analysis and Algebra,(招待講演)(国際会議) July 22-26,2013, Bernuoulli Center, EPFL,Lausanne(Switzerland)
〔図書〕（計１件）
1.T.Eguchi, Y.Eliashberg, Y.Maeda, Symplectic, Poisson, and Noncommutative Geometry, MSRI Publications, 62, 2014.
〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
前田　吉昭(Maeda, Yoshiaki)（東北大学知の創出センター・特任教授）

研究者番号：40101076

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：