

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2016

課題番号：25610019

研究課題名(和文)層とD加群のための境界値問題の代数解析的研究

研究課題名(英文)Algebraic analysis of boundary value problems for sheaves and D-modules

研究代表者

内田 素夫(Uchida, Motoo)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：10221805

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：層とD加群のための境界値問題を定式化し、基本定理を証明した。またマイクロ微分方程式系に対する初期値問題を考察し、基本定理としてのコーシー・コワレフスカヤ型定理を(高次コホモロジー群まで考慮に入れた柏原正樹による定式化に倣つて)層の超局所化のことで定式化し証明を与えた。

研究成果の概要(英文)：The boundary value problems for sheaves and D-modules is formulated and the fundamental theorem is proved. We also considered the initial value problem for systems of micro differential equations and proved the fundamental Cauchy-Kowalevskaja-Kashiwara theorem (an extended version of Cauchy-Kowalevskaja theorem taking cohomology of any degree into consideration) in terms of microlocalization of sheaves.

研究分野：代数解析

キーワード：境界値問題 D加群 層

1. 研究開始当初の背景

本研究課題は（一般に過剰決定的 (overdetermined) な場合を含む) 一般微分方程式系の境界値問題について、その指数公式を一般的な形式で、代数解析的に与えることを目標としたものである。微分方程式系を（函数空間によらない）代数的なことばで研究するD加群の理論は、佐藤幹夫によってその着想が発表された直ぐ後の1970年から柏原正樹によって精力的な研究が開始され、佐藤幹夫・河合隆裕・柏原正樹によるマイクロ函数と擬微分作用素の理論の完成を踏まえて、基礎理論の確立と並行して、他分野への応用も含め目覚ましい研究成果が続々と発表された。1970年代後半から1980年代にかけて柏原は、先づ極大過剰決定系に対して、次いでその一般化として構成可能層に対して極めて一般的な指数公式を証明した。その後1980年代末から1990年にかけて柏原とSchapiraによって層の超局所解析の理論が整備され、それを用いることで1994年にはSchapiraとSchneidersによって、柏原の指数公式の定式化にならってD加群と実構成可能層の楕円対に対して特性輪体を定義することにより、楕円対の指数公式が与えられた。この結果から、巡回コホモロジー理論を経由することによって、Atiyah・Singerの指数公式の代数解析的な証明が与えられる(Bressler, Nest, Tsyganによる)。一方、境界値問題の指数公式については、多くの個別的な函数解析的研究の蓄積がある一方で、一般理論と呼ばれるものが存在していなかった（し、現在も存在しない）。以上のような研究状況に於いて、SchapiraとSchneidersによる楕円対の指数公式の境界値問題への一般化或いは発展として、代数解析的な枠組で境界値問題の指数公式を一般的

な形式として記述することを目指すものとして、本研究を行なうに至った。

2. 研究の目的

研究の背景として前項で述べたように、微分方程式系即ちD加群或いは構成可能層については柏原, Schapira, Schneiders等の結果により一般的な指数公式が得られているにも拘らず、境界値問題の指数公式については、多くの個別的な函数解析的研究の蓄積がある一方で、一般理論と呼ばれるものが存在しない。本研究はこの欠落を埋めるべく（一般に過剰決定的な）微分方程式系の楕円型境界値問題に対して、その指数公式を一般的な形で与えることを目的とするものであった。そのために先づ、境界値問題そのものを代数解析的に（D加群と層のことばで）定式化し、その定式化のもとで指数公式を超局所解析のことばを用いて定式化することを目標とした。

3. 研究の方法

本研究は専ら研究代表者の個人研究（理論的研究）であったが、主要な部分は研究協力者（海外共同研究者）のPierre Schapiraとの共同研究として行なった。研究分担者本多尚文は、本研究課題と関連して、ストークス現象の代数解析、ラプラス超函数の理論などで独自の研究を行なった。研究代表者は本研究課題としての研究開始に先立つ2013年2月にパドヴァ大学の国際研究集会に出席し、研究の構想と準備状況を発表した。それをもとにさらに研究を進めた。研究協力者のPierre Schapiraとは研究期間を通じて問題点などを直接議論する機会を持った。

4. 研究成果

本研究は、本研究に先立つ以下で学会発表した研究代表者の研究をもとに構想された。

1) 内田素夫 (Motoo UCHIDA), Algebraic analysis of boundary value problems for sheaves and D-modules, 超局所解析と漸近解析の最近の進展(2012年10月23~26日), 2012年10月26日, 京都大学数理解析研究所

2) 内田素夫 (Motoo UCHIDA), Algebraic analysis of boundary value problems for sheaves and D-modules, Recent Trends in Algebraic Analysis (Padua, February 19-23, 2013), 2013年2月22日, Universita degli Studi di Padova, Padova (イタリア共和国)

前述したように、微分方程式系即ちD加群或いは構成可能層の指数公式については一般的枠組が構築されているにもかかわらず、境界値問題の指数公式については個別的な函数解析的研究の蓄積がある一方で、一般理論と呼ばれるものがまったく存在しない。本研究は(一般に過剰決定的な)微分方程式系の楕円型境界値問題に対してその指数公式を一般的な形式で与えるために、境界値問題そのものを代数解析的に(D加群と層のことばで)定式化し、その定式化のもとで、指数公式を超局所解析のことばを用いて定式化しその証明を与えることを目的とするものであった。本研究を通じて、境界値問題そのものを代数解析的に(D加群と層のことばで)定式化することには成功したと考えられる。それを用いて境界値問題の解の高次コホモロジーまで含めた有限性が証明できる。また副産物として、層の超局所化における超局所コーシー・コワレフスカヤの定理の厳密な証明を与えた。これらについては発表準備中である(Pierre Schapiraとの共同研究)。指数定理の定式化については研

究期間中に完成できなかったため、現在も研究を継続中である。また研究の過程で、微分作用素のスペクトル理論を代数解析的に展開するための枠組となり得る着想を得、コンパクト多様体上の楕円型微分作用素の固有値の離散性が代数解析的な考察で導かれる可能性が明らかになった。その着想を正しく定式化し固有値の離散性に厳密な代数解析的証明を与えることについては、現在研究を継続中である(Pierre Schapiraとの共同研究)。このような新しい視点からの基礎的研究は、現在に至るまで国内外双方に於いて全く試みられておらず、その学術的意義は十分大きい。すなわち古典的な諸結果を代数解析的に考察し直すことにより、解析学の古典的諸結果の相互の関係や構造が明確になり、解析学の今後の新たな展開の契機ともなり得るのではないかと希望的に推測することができる。本研究期間中には完成には至らなかったが、研究の重要性及び今後の研究の方向を示唆するだけの研究成果は十分あったと考えられる。微分作用素のスペクトル理論についてはその代数解析的な基礎付けさえ創出されておらず、本研究により代数解析的理論構築の端緒が開かれ、今後の発展の足掛かりとなることが期待できる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計0件)

[学会発表] (計0件)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況（計0件）

〔その他〕（計0件）

6. 研究組織

（1）研究代表者

内田 素夫 (Uchida Motoo)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10221805

（2）研究分担者

本多 尚文 (Honda Naofumi)
北海道大学・理学研究院・教授
研究者番号：00238817

（3）連携研究者 なし。

（4）研究協力者

P i e r r e S c h a p i r a (Pierre
Schapira)
パリ第6大学（フランス）・理学部・名誉
教授