

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 14 日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610022

研究課題名(和文)量子群の幻影の研究

研究課題名(英文)Study in phantom of the quantum groups

研究代表者

村上 順 (Murakami, Jun)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：90157751

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：量子群でその量子パラメータ q が1の冪根の場合に、必ずしも半単純とはならない射影的な表現についてその性質を調べ、この表現と対応する結び目や3次元多様体の量子不変量を構成し、その性質を調べた。通常の結び目に対する不変量は以前に logarithmic 不変量として構成していたが、新たに3次元多様体中の結び目に対する不変量を logarithmic 不変量を拡張したものとして構成し、さらに、体積予想の新しいバージョンとして、対応する双曲多様体の体積との関係についても明らかにした。

研究成果の概要(英文)：Quantum groups whose quantum parameter q are roots of unity have projective representations which is not always semisimple. In this research, properties of such representations are studied, invariants of knots and 3-manifolds related to such representations are constructed, and properties of such invariants are studied. Such invariant for knot is already constructed as the logarithmic invariant, and it is extended in this research to invariants of knots in 3-manifolds. The relation of logarithmic invariant and its generalization to the hyperbolic volume of the corresponding manifold is also given, which is a version of the volume conjecture of quantum invariants.

研究分野：表現論

キーワード：量子群 結び目 低次元トポロジー 体積予想

1. 研究開始当初の背景

(1) 神保とドリinfeldによる量子群の発見は数学ばかりでなく物理学にも大きな影響を与え、空間の対称性を見る新しい視点を与えた。量子群はリー環の量子化と考えられ、その表現論は量子化のパラメータ q が一般的な場合はリー環の表現論と同様になることが知られており、また一方で q が1の冪根となる場合については、リー環の時に見られなかった複雑な現象が現れることも明らかにされてきた。

(2) 量子群の発見と同時期にジョーンズにより結び目のジョーンズ多項式が発見され、量子群と対応することがわかり、結び目の数多くの量子不変量が構成された。これとは別にカシャエフは量子双対数関数から結び目不変量を定義し、結び目補空間と関係することを見出したが、実はこの不変量は、 q が1の冪根の場合の量子群の射影的な表現と対応することが明らかになっている。他の射影的な表現に対応する結び目の不変量も双曲体積と関係するため、1の冪根の必ずしも半単純でない射影的な表現が幾何構造と深く関係していると期待される。

2. 研究の目的

(1) 研究目的の一つは、量子化のパラメータ q が1の冪根のときの量子群について、その射影的表現についての表現論的な性質を明らかにするというものである。

量子群とは、リー環の普遍包絡環を q 変形したものであり、量子化のパラメータ q が一般的な変数の場合は、その表現論的な性質はリー環の普遍包絡環の表現論的な性質にほぼ対応しているのであるが、 q が1の冪根の場合は量子群特有の性質を持つ。この性質のことをリー環の場合にはあらわれないものなので「幻影」とよび、これについて表現論的な観点から調べるため、とくに射影表現という必ずしも半単純ではない表現に注目して、その性質を研究する。

(2) 量子化のパラメータ q が1の冪根の場合の量子群の射影表現に対応する結び目や3次元多様体の不変量について研究する。ジョーンズ多項式の発見以来、量子群と関係する結び目や3次元多様体の不変量が数多く作られたが、1996年にカシャエフにより構成された双曲体積と関係する不変量が量子群のある射影表現に由来する不変量であったことから、量子群の幻影、すなわち射影表現などの通常のリー環からはわからない部分に幾何学と深く関係する性質が潜んでいると期待されるので、このことを明らかにする。

3. 研究の方法

(1) まず表現論からのアプローチとして、 q が1の冪根の場合の量子群に対して、その有

限次元表現について調べる。この量子群は、有限次元表現として、本質的には、リー環の既約表現に由来するもの、射影表現、それに最高ウェイトが整でない最高ウェイト表現という3通りのものに分類される。そこでまずこの3通りの表現の関係を明らかにする。リー環の表現論でも最高ウェイト表現は研究の中心的な対象であったのだが、本研究では、最高ウェイトが整でない最高ウェイト表現に注目し、このウェイトを連続的に変形していくことで射影表現の性質を明らかにする。射影表現は必ずしも既約ではないのであるが、最高ウェイトが整でない最高ウェイト表現は既約表現であり、その代数的な性質は通常の表現論的手法からよくわかるので、この変形の先として射影表現を捉えることで、射影表現についての性質を調べる。

(2) 量子化のパラメータ q が1の冪根の場合の量子群の射影表現に対応する結び目や3次元多様体の不変量についての研究でも、先に述べた(1)での最高ウェイトが整でない最高ウェイト表現を変形することで射影表現を調べるという手法を活用する。最高ウェイトが整でない最高ウェイト表現に対応する結び目の不変量は以前に阿久津-出口-大槻(文献)により構成されており、さらにこれから最高ウェイトの変形により射影表現に対応する不変量を永友-村上(文献)で構成されている。また、この量子化のパラメータ q が1の冪根の場合の量子群に対応する3次元多様体の不変量としてウィッテン-レスエティヒン-トラエフ不変量(文献)とヘニングス不変量(文献)が構成されている。ウィッテン-レスエティヒン-トラエフ不変量はリー環由来の表現のみを用いて構成されているのに対し、ヘニングス不変量は射影表現の情報を用いて構成されている。このヘニングス不変量と永友-村上による不変量とを比較研究することにより、より一般の場合についての射影表現に対応する不変量の構成を行う。

<引用文献>

Deguchi, T.; Ohtsuki, T., Invariants of colored links, *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 1 (1992), 161-184.

Murakami, J.; Nagatomo, K., Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups, *International Journal of Mathematics* 19 (2008), 1203-1213.

Reshetikhin, N.; Turaev, V. G., Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Inventiones Mathematicae* 103 (1991), 547-597.

Hennings, M., Invariants of links and

3-manifolds obtained from Hopf algebras. Journal of the London Mathematical Society, Second Series 54 (1996), 594- 624.

4. 研究成果

(1) 表現論からの研究として、射影表現に対応する量子 $6j$ 記号について調べた。量子 $6j$ 記号とは、4つの表現のテンソル積を2通りに分解した時の変換係数を表すもので、リー環で構成されたものの量子化がキリロフ-レシェティヒン(引用文献)で構成されているが、これはリー環由来の表現に関するものであり、本研究では、コスタンティノとの共同研究により、射影表現に対する量子 $6j$ 記号の構成を試みた。具体的な構成法としては、まず、主な発表論文等の雑誌論文にあるように最高ウェイトが整でない表現についての量子 $6j$ 記号を求め、そのウェイトを整ウェイトに近づけていった極限として射影表現の量子 $6j$ 記号を定義した。一般に、最高ウェイトが整の既約表現と最高ウェイトが整の射影表現は、最高ウェイトが等しくても異なるものであり、本研究で定義された量子 $6j$ 記号もリー環由来の量子 $6j$ 記号とは大きく異なるものになっている。本研究では、量子 $6j$ 記号が双曲四面体の体積とも密接に関係することを明らかにした。

(2) カシャエフにより定義された結び目の量子不変量は、パラメーター q が1の冪根の量子群の表現の中でも、リー環由来のものでありながら射影表現にもなっているという大変特別な表現に対応するものである。この場合について対応する量子不変量と結び目補空間の双曲幾何構造との関係を調べ、不変量と双曲体積やチャーンサイモンズ不変量との関係について主な発表論文等の雑誌論文において明らかにした。このような量子不変量と幾何構造の対応の研究は既に横田(引用文献)でもされていたが、横田の研究はカシャエフの構成に対応したものであるのに対し、本研究は量子群の最高ウェイト表現としての表現の構成に対応するものであり、構成法が異なるため対応する幾何的な状況も異なるものとなっている。

(3) 引用文献で構成された、射影表現と対応する結び目の量子不変量を、ヘニングス不変量(引用文献)と組み合わせて3次元多様体中の結び目の不変量に拡張した。これについては、掲載予定となっている主な発表論文の雑誌論文でまとめられているが、さらにこの論文では、この不変量と3次元多様体中の結び目の補空間の双曲体積との関係をレンズ空間中の結び目に対してしらべ、通常の3次元空間中の結び目の場合の体積予想と同様の関係が成り立つことを確認した。

(4) 結び目の量子不変量はキリロフ-レシェティヒン(引用文献)により空間中の3価

グラフの不変量に拡張されている。3価グラフとは、各頂点に辺が3本集まったグラフのことである。この不変量は横田(引用文献)により空間中の多価グラフの不変量に拡張され、さらには、水澤との共同研究により主な発表論文等の雑誌論文により、ハンドル体結び目の不変量に拡張された。これらはすべてリー環由来の表現を用いて構成されたものであるが、一方で、水澤との共同研究で引用文献ではパラメーター q が1の冪根の量子群の最高ウェイトが整でない表現に対する3価グラフの不変量を構成した。これはまだ射影表現に対応する不変量ではないが、具体的な例で調べてみると、最高ウェイトを整にもっていく極限でも定義できているようで、射影表現に対応する空間グラフや、さらにはハンドル体結び目の不変量の存在についての期待を抱かせる結果となった。

(5) 射影表現と深く関係すると考えられる双曲構造に関する研究として、コルパコフとの共同研究により、主な発表論文等の雑誌論文においてあ種の一般化された双曲四面体の体積公式を得た。さらにこの手法をもちいて、引用文献でプリズム状の双曲多面体の体積を求める手法を提唱した。この方法の背景にあるのは、引用文献の3価グラフの量子不変量であり、この手法を一般化して、一般の双曲多面体についても同様にして体積が求められることが期待でき、幾つかの例について引用文献で確かめた。

<引用文献>

Kirillov, A. N.; Reshetikhin, N. Yu., Representations of the algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links, Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988), 285-339, Adv. Ser. Math. Phys., 7, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

Yokota, Y., On the complex volume of hyperbolic knots. Journal of Knot Theory and its Ramifications 20 (2011), 955-976.

Murakami, J.; Nagatomo, K., Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups, International Journal of Mathematics 19 (2008), 1203-1213.

Hennings, M., Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras. Journal of the London Mathematical Society, Second Series 54 (1996), 594- 624.

Yokota, Y., Topological invariants of graphs in 3-space. Topology 35 (1996), 77-87.

Mizusawa, A.; Murakami, J., Yokota type invariants derived from non-integral highest weight representations of $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, arXiv:1502.04477

Kolpakov, A.; Murakami, J., The dual Jacobian of a generalised tetrahedron, and volumes of prisms, arXiv:1409.3355

Kolpakov, A.; Murakami, J., Combinatorial decompositions, Kirillov-Reshetikhin invariants and the Volume Conjecture for hyperbolic polyhedral, arXiv:1603.02380

5. 主な発表論文等 〔雑誌論文〕(計 5 件)

Murakami, Jun, Generalized Kashaev invariants for knots in three manifolds, Quantum Topology, 査読有, 掲載予定
<https://www.emis-ph.org/journals/forthcoming.php?jrn=qt>

Mizusawa, Atsuhiko; Murakami, Jun, Invariants of handlebody-knots via Yokota's invariants, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 査読有, 22 巻, 2013, 1350068, 21 pp.
DOI: 10.1142/S0218216513500685

Costantino, Francesco; Murakami, Jun, On the $SL(2, \mathbb{C})$ quantum $6j$ -symbols and their relation to the hyperbolic volume, Quantum Topology, 査読有, 4 巻, 2013, 303--351
DOI: 10.4171.QT/41

Kolpakov, Alexander; Murakami, Jun, Volume of a doubly truncated hyperbolic tetrahedron, Aequationes Mathematicae, 査読有, 85 巻, 2013, 449--463
DOI: 10.1007/x00010-012-0153-y

Cho, Jinseok; Murakami, Jun, Optimistic limits of the colored Jones polynomials, Journal of Korean Mathematical Society, 査読有, 50 巻, 2013, 641--693
DOI: 10.4134/JKMS.2013.50.3.641

〔学会発表〕(計 13 件)

村上 順, Logarithmic invariant of knots and its applications, Braids, Configuration Spaces, and Quantum Topology, 2015 年 9 月 7 日, 東京大学数理科学研究科 (東京都・目黒区)

村上 順, Logarithmic invariants of knots in a three manifold, New Developments in TQFT, 2015 年 7 月 31 日, Centre for Quantum Geometry of Moduli

Spaces, Aarhus University, オーフス (デンマーク)

村上 順, Volumes of hyperbolic and spherical polyhedrons, 8th Australia New Zealand Mathematics Convention, 2014 年 12 月 8 日, University of Melbourne,メルボルン (オーストラリア)

村上 順, Logarithmic invariants of links, Quantum Topology and Physics 2014 in Fukuoka, 2014 年 9 月 18 日, 西新プラザ, 九州大学 (福岡県・福岡)

村上 順, Logarithmic knot invariants and hyperbolic volumes, Knots and Low Dimensional Manifolds, 2014 年 8 月 25 日, BEXCO Convention & Exhibition Center II, プサン (韓国)

村上 順, Logarithmic invariant of knots, Quantum Curves and Quantum Knot Invariants, 2014 年 6 月 19 日, Banff International Research Station, バンフ (カナダ)

村上 順, Generalized Kashaev invariants for knots in three-manifolds, Modern Trends in Topological Quantum Field Theory, Workshop II, 2014 年 3 月 20 日, Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, ウィーン (オーストリア)

村上 順, Knots invariants coming from the small quantum group, 第 58 回代数学シンポジウム, 2013 年 8 月 26 日, 広島大学理学部 (広島県・東広島)

村上 順, Volume formulas for a spherical tetrahedron, Geometric structures on low-dimensional manifolds, 2013 年 5 月 24 日, Korea Institute for Advanced Study, ソウル (韓国)

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.f.waseda.jp/murakami/jun-home-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村上 順 (MURAKAMI, Jun)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 90157751