2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１１３０１

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：２５６１００２３

研究課題名（和文）放物型方程式の解の放物型凸性

研究課題名（英文）Parabolic concavity of solutions of parabolic equations

研究代表者

石毛　和弘（Ishige, Kazuhiro）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：９０２７２０２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：石毛・Salani によって導入された放物型冪凸性の概念の妥当性を証明するために、放物型冪凸性を証明するための新たな解析手法を導入し、ある非線形放物型方程式の解の放物型凸性を示した。さらに、その解析手法を応用し、放物型方程式系に対しても解の放物型冪凸性を証明した。また、これらを応用し、領域のミンコフスキー和と対応する解の関係に関するある不等式を導いた。

研究成果の概要（英文）：We introduced a new method for the study of parabolic concavity properties of solutions to parabolic boundary value problems and proved that a solutions of a nonlinear parabolic equation has parabolic power concavity properties. Furthermore, applying the arguments to parabolic concavity properties, we obtained parabolic power concavities of solutions to nonlinear parabolic systems and the relationship among the Minkowski additions of domains and the solutions of parabolic boundary value problems.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：放物型方程式　冪凸　放物型凸

１．研究開始当初の背景

偏微分方程式の解の形状、特に解の凸性について研究を行うのは、偏微分方程式論において自然な研究の方向性であると考えられ、実際に、多くの研究が為されてきた。しかしながら、放物型方程式の解の凸性の研究は、時間変数を固定し空間変数に関する解の凸性を研究するものがほとんどであり、時空間両変数に関する凸性の研究は稀であった。

より具体的に述べることにする。放物型方程式の解の凸解析は、1976 年の Brascamp と Lieb による研究により大きな進展を遂げた。彼らはガウス核の持つ対数凸性を着目し, 熱方程式においては非負値解の対数 凸性の時間不変性の証明を行った。その後, 1980 年代初頭におけるKorevaar による改良により，比較原理を用いた解の凸性の研究が始まり、Kawohl らによって非線形楕円型方程式の解の凸性、各時刻における放物型方程式の解の (空間変数に関する) 凸性について多くの研究が為された。

しかしながら、熱方程式に関して空間変数および時間変数の両方に関しての凸性については、1980 年代の前半における Borell による確率論的考察を除き近年まで研究がなく、石毛及び Paolo Salani 氏 (フィレンツェ大学、イタリア)による論文

「K. Ishige and P. Salani、On a new kind of convexity for solutions of parabolic problems、Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S、査読有、Vol. 4、2011、851—864」

が広汎な放物型方程式の解に対して、時空間変数に関する解の凸性を与える唯一の結果となっている。

石毛および共同研究者である Paolo Salani 氏によって提唱された放物型凸性は放物型対数凸性、放物型等高面凸性など階層化された凸性の概念の構築を可能にする。また、これらの概念は、時間変数を固定すると空間変数に関する解の凸性の概念に相当するため、ある意味、既存の冪凸性の概念の自然な拡張であると言える。

しかしながら、放物型凸のような時空間変数に関する凸性という研究は方向性そのものが新しく始まったばかりの研究対象であるため、ほとんど研究が進んでいない。

２．研究の目的

2011 年における石毛及び Paolo Salani 氏による上記論文では、環状領域における放物型方程式の解の放物型等高面凸性が証明され、放物型凸の概念の有用性が示されているものの、汎用性のある概念であるかどうかまでは示されていない。本研究では、まず、放物型凸性を持つ放物型方程式の解の新しい例を作ると共に、放物型凸性を示すための新たな解析手法の確立を目的とする。

また、我々の解析手法は、今まで解析不能であった非線形楕円型方程式系や非線形放物型方程式系の解の凸解析にも応用可能であると考えており、それらの解析も合わせて研究を行い、方程式系の解の凸性について明らかにして行く。

３．研究の方法

(i)　　非斉次熱方程式の解の放物型凸性
(ii)　　放物型方程式系の解の凸性

について研究を行い、必要に応じて研究協力者であるフィレンツェ大学(イタリア)の Paolo Salani 氏と連絡をとりながら研究を行う。

(i)　非斉次熱方程式の解の放物型凸性：
非斉次楕円型方程式の解の凸性については、1983 年による N. J. Korevaar による研究により、非斉次項の凸性と解の凸性との関係が詳しく解析されている。 これに着想を得て、初期値を零にもつ非斉次熱方程式の初期値問題を考察し、その非負値解の放物型凸性と非斉次項の凸性との相関について研究を行う。これには、2011 年の石毛・Salani による上記論文によって導入された階層化された凸性の概念が有効であると考えられ、Korevaar の結果を拡張した新たな視点を含む結果が期待する。また、この解析には、解の凸包を考え、それに粘性解的手法を用いた凸解析が有効であると考えている。

(ii)　放物型方程式系の解の凸性：
(i) における解析に基づき、非線形楕円型方程式系の解の凸性について考察す

る。その進展に伴い、非線形放物型方程式系への発展も視野に入れて研究を行い、放物型凸という概念の有効性を示す具体的な問題を模索していく。これらの解析も (i) 同様、解の凸包を考え、それに粘性解的手法を用いた凸解析が有効であると考えている。

さらに、(i) (ii) の研究において得られた放物型凸性の解析手法を整理し、発展させることを行う。

４．研究成果

放物型方程式の解の凸性：非線形放物型方程式の解の時空間変数に関する凸性について、Paolo Salani 氏との共同研究として以下のことについて研究を行った。

(ア) 初期条件、境界条件が零という状況の下、ある非線形性をもつ非斉次項付き熱方程式を考え、その解が放物型凸性を有することを証明した。この結果は、1985 年の Kennington による非線形楕円型方程式の解の冪凸性に対する結果の放物型版とみなすことができるものである。また、この結果は、解の積分量に関する時間変数の凸性も導き出すことも可能である。

(イ) 全空間の熱方程式の解は、初期関数にどのような強い凸性を仮定したとしても、解は時間の経過に伴い、(空間変数に関して)対数凸性よりも強い凸性は有しない。しかし、本研究では、適当に初期関数に凸性を課すと、その解の時間積分は対数凸性よりも強い凸性を持つことを示した。この研究は、解の時間積分として与えられる関数に(ウ)での議論を適用することによって与えられる。

(ウ) 粘性解理論の専門家である中川和重氏 (福島大学) を共同研究者に加えて、放物型方程式系の解の放物型冪凸性について研究を行い、解が放物型冪凸性を持つための十分条件を与えた。また、その解の時間無限大極限を考えることにより、楕円型方程式系の解の冪凸性に関する結果も得た。既存の解析手法では、方程式系の解の凸性を証明することは困難であるため、我々の解析手法の優位性を示せたと考えている。

上で述べた放物型凸性の議論は、我々の共同研究によって初めて導入された概念であるが、(ア)(イ)(ウ) を通して、概念の汎用性が確認されると共に、その有効性が示されたと考えている。

さらに、上記の議論を応用し、次のような問題を考えた。２つの領域から、そのミンコフスキー和によってなされる領域を構成し、結果として、３つの領域を考える。さらに、それぞれの領域において放物型方程式の解を考えることによって、３つの関数を構成することができる。この操作に、放物型冪凸性の議論を応用することによって、適当な仮定の下、この３つの関数がある不等式をみたすことが証明できた。より具体的には、ミンコフスキー合成という概念を導入し、そのミンコフスキー合成で構成された解が、ミンコフスキー和で構成された領域上の放物型方程式の劣解であることを証明し、３つの関数の関係式を導く。

この応用として、１つの領域を回転させて 2 つ目の領域を構成し、ミンコフスキー和によって３つ目の領域を構成する。回転を色々取り替えて、この操作を繰り返すことにより、その領域は球に近づく。これに、上で述べたミンコフスキー合成を中心とした議論を適用すると、良く知られた関数の再配置理論とは異なる新たな再配置理論が構築できる。本研究では、その応用として、強い吸収項をもつ非線形放物型方程式における特徴的な現象である死滅領域に対して、死滅領域が派生するための領域の条件を求め、また、死滅領域の放物型凸集合性について証明を行った。

５．主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計　2 件)

① Kazuhiro Ishige、Paolo Salani、A note on parabolic power concavity、Kodai Math. J.、査読有、Vol. 37、2014、668 -679
DOI:10.2996/kmj/1414674615

② Kazuhiro Ishige、Paolo Salani、Parabolic power concavity and parabolic boundary value problems、Math. Ann.、査読有、Vol. 358、2014、1091-1117
DOI:10.1007/s00208-013-0991-5

〔学会発表〕（計　10 件）

① Kazuhiro Ishige、Power concavity in weakly coupled elliptic and parabolic systems、パターン生成とダイナミクスの解構造の探求研究集会、2015、6 月 26 日、北海道大学 学術交流会館

② Kazuhiro Ishige、Concavity properties of solutions for parabolic equations、Seminar on Qualitative Theory of Differential Equations、2015、5 月 21 日、Comenius University

③ Kazuhiro Ishige、Parabolic Minkowski convolutions of solutions to parabolic boundary value problems、浜松偏微分方程式セミナー、2015、5 月 12 日、静岡大学

④ Kazuhiro Ishige、Parabolic Minkowski convolutions of solutions to parabolic boundary value problems、名古屋大学微分方程式セミナー、2015、5 月 11 日、名古屋大学

⑤ 石毛和弘、放物型方程式の解の凸性について、日本数学会、2014 年度(第 13 回)解析学賞受賞特別講演、2015、明治大学

⑥ 石毛和弘、放物型冪凸と放物型境界値問題、応用解析セミナー、2014、7 月 3 日、東京大学

⑦ 石毛和弘、放物型冪凸と放物型境界値問題、第５回ハミルトン系とその周辺研究集会、2014、5 月 29 日、金沢大学

⑧ Kazuhiro Ishige、Parabolic power concavity and parabolic boundary value problems、HMA セミナー・冬の研究会、2014、1 月 10 日、広島大学

⑨ Kazuhiro Ishige、Parabolic power concavity and parabolic boundary value problems、Minisymposium ``Qualitative Theory of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations"、Equadiff 2013、2013、8 月 26 日、Charles University, Prague

⑩ Kazuhiro Ishige、Parabolic power concavity and parabolic boundary value problems、九州関数方程式セミナー, 2013、5 月 17 日、福岡大学

〔図書〕（計　0 件）
なし

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）
なし

○取得状況（計　0 件）
なし

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1) 石毛　和弘（ISHIGE, Kazuhiro）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：９０２７２０２０

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし