

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610027

研究課題名(和文)質量共鳴における振動と特異性の研究

研究課題名(英文)Study on oscillation and singularity in mass resonance

研究代表者

小澤 徹 (Tohru, Ozawa)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70204196

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：二次の相互作用を持つ非線型シュレディンガーの連立系に対するラグランジアンを書き下し、質量共鳴現象のラグランジュ形式による系統的説明を与え、波動関数の複素共軛の果たす役割が本質的である事を見出した。

質量共鳴現象に伴う定在波の解析を変分問題として定式化し、基底状態の存在と(本質的な)一意性を示した。また、質量共鳴条件下で任意に小さな初期データでも爆発現象を生み出す相互作用の具体例を得た。

研究成果の概要(英文)：Mass resonance phenomenon of systems of nonlinear Schrödinger equations is studied. We have found an appropriate Lagrangean for the system of Schrödinger equations with quadratic interactions, by which we are able to give a clear explanation of the roles of mass resonance phenomenon as well as of complex conjugate in wavefunctions.

A variational setting has been introduced for the analysis on standing waves associated with mass resonance. We proved the existence and (essential) uniqueness of ground states.

Moreover, examples of interactions were found for the blow-up solutions with arbitrarily small Cauchy data under mass resonance condition.

研究分野：数物系科学

キーワード：関数方程式の大域理論

1. 研究開始当初の背景

現実的なモデルであるスカラー場とゲージ場の相互作用系の数学的研究の多くは、単独方程式に自然に対応する理論に留まっており、方程式系(system)にして初めて見えてくる構造の本質的解明まで至ったものは少なかった。方程式系特有の現象にとって、場の伝播速度の相違と質量比が線型構造の決定因子であり、零構造が非線型構造の決定因子である。伝播速度の相違と零構造の関係については、久保英夫、横山和義、片山聡一郎等によって、ほぼ完全に記述されている。一方、質量比が零構造に及ぼす影響については一部を除いて未解決のままであった。質量比が大域解の存在証明に深く影響する事は、マクスウェル・ヒッグス場とクライン・ゴールドン場に対し、それぞれ堤誉志雄と砂川秀明によって独立に2003年に発表されたが、それは質量非共鳴条件を通じて見出されたものであった。質量非共鳴条件下では、波動関数に振動因子が単色波的に加わるため、時間変数に関する部分積分を通じた時間減衰により、非線型項の統御が可能となり、大域解の存在が保証される。質量共鳴条件下では、振動因子が消滅するため、非線型項の零構造を見出す必要が生じる。空間2次元のクライン・ゴールドン場に対して零構造を初めて構成したのは J. - M. Delort, D. Fang, R. Xue (J. Funct. Anal. 211(2004), 288-323)であったが、その機構は必ずしも明確ではなかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、古典場としてのゲージ場理論に典型的に現れる質量共鳴現象 (mass resonance phenomenon)の数学的本質を振動 (oscillation) と特異性 (singularity) をキーワードとして研究することにより、非線型偏微分方程式の基礎理論 (初期値問題の解の存在と一意性、定在波の解析、爆発理論、散乱理論など)における方程式系 (system)特有の相互作用を、線型構造 (方程式の線型項を成す偏微分作用素の系) と非線型構造 (スカラー場とゲージ場の成す双線型形式および一次半形式) の両立条件の立場から明らかにすることである。具体的には、質量共鳴条件下で、両立する相互作用をラグランジアンで特徴づけ、付随する正規型変換と双線型振動積分作用素との関係の特徴づけ、振動因子の影響を除いた場の空間的構造を変分解析的に解明することを目指す。

3. 研究の方法

正規型変換における質量共鳴研究：非線型クライン・ゴールドン方程式系の零構造と正規型変換の代数学的構造の研究を一層深めると共に、マクスウェル・ヒッグス場、マクスウェル・クライン・ゴールドン場への考察へと対象を拡大する。対応する Coifman-Meyer 型の双線型振動積分表示のルベグ空間上の有界性の議論の中で、Shatah や Masmoudi

の時空共鳴との関連を、位相函数の変換則によって、解析力学やラグランジュ幾何の視点から定式化する。変分解析における質量共鳴研究：質量共鳴に伴う単色波的振動因子の影響を除いた楕円型方程式系を変分問題として定式化する。対称再配分を施すことにより、ストラウス型コンパクト性の議論が導入できるが、エネルギーの枠組では空間次元は2以上5以下の制限を伴う。空間1次元の場合は、空間変数を時間変数としたラグランジュ系と捉え直して検討する。空間6次元の場合は、コンパクト性は破綻するが、特別なスケール則が現れるので伸長変換で方程式を書換えることから検討する。

非相対論的極限における質量共鳴研究：質量共鳴条件下でのクライン・ゴールドン場からシュレディンガー場への非相対論的極限を、光速因子 c をパラメータとする光速無限大 c

での波動函数の漸近挙動によって記述する。

具体的な研究方法は次の通り：1. 研究代表者・分担者で日常的に研究討論を行い、それぞれ各グループの研究について進捗状況を確認し合う。2. 海外共同研究者を訪問、招聘してそれぞれの共同研究を推進する。3. 本研究計画に関連する研究分野の研究者から適宜、専門知識の提供を受ける。

4. 研究成果

二次の非線型シュレディンガー方程式の連立系に対して、ラグランジアンを具体的に見出した。これにより、シュレディンガー方程式の連立系における質量共鳴のラグランジュ幾何からの把握が系統的に出来るようになり、二次の相互作用における波動函数の複素共軛の存在が本質的である事が説明可能となった。また、質量共鳴に伴う単色波振動因子の持つ位相変調により得られる楕円型方程式系を変分問題として定式化し、空間次元に関して2次元以上5次元以下ではコンパクト性及び再配列理論を用いる事により、また、コンパクト性が丁度失われる6次元では、スケージングの議論を用いる事により、その基底状態の存在と本質的な一意性を示す事が出来た。更に、質量共鳴条件下で初期データの大きさを任意に小さく取っても解の爆発現象を生み出す相互作用を、ホップ・コール型の変換に基づいて具体的に書き下す事が出来た。更に、質量共鳴条件に現れる質量比と爆発率との密接な関係を、初期データの大きさの観点から特徴づけた。また、初期データが空間遠方で指数函数的に減衰している場合に、質量共鳴条件下で時刻 $t = 0$ となった途端、解が解析的になるという現象を定式化した。同時に、連立系の波動函数の収束半径に相当するパラメータの比が質量共鳴条件に現れる質量比と一致することも見出し、質量共鳴と解の解析性との関係に関し、新たな知見を得た。半相対論方程式系に対しては、フーリエ制限法 (ブルガンの方法) に

自乗可積分関数の成すヒルベルト空間上の内積の計算を導入することにより、波の振動現象を直交性の観点から制御し、精密な結論を導いた。これは、フーリエ制限法に新たな視点・方法論をもたらす従来のコンパクト性の議論を、エネルギーの観点から導かれる自然な一様評価と弱いノルムにおけるコーシー列の証明を組み合わせることで議論を再構成し、新たな方法論を提示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

G. Hoshino, T. Ozawa

Analytic smoothing effect for the cubic hyperbolic Schrödinger equation in two space dimensions, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016(2016), 1-8
査読有

G. Hoshino, T. Ozawa

Space-time analytic smoothing effect for the pseudo-conformally invariant Schrödinger equations, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, NoDEA, 23(2016), 1-10
DOI 10.1007/s00030-016-0362-5.
open access
査読有

K. Fujiwara, S. Machihara, T. Ozawa

Well-posedness for the Cauchy problem for a system of semirelativistic equations, *Commun. Math. Phys.*, 338(2015), 367-391.
DOI:10.1007/s00220-015-2347-3
査読有

G. Hoshino, T. Ozawa

Analytic smoothing effect for a system of Schrödinger equations with two wave interaction, *Adv. Differential Equations*, 20(2015), 697-716.
査読有

G. Hoshino, T. Ozawa

Analytic smoothing effect for a system of Schrödinger equations with three wave interaction, *Journal of Mathematical Physics*, 56(2015)091513;
DOI: 10.1063/1.4931659
査読有

S. Machihara, T. Ozawa, H. Wadade

Scaling invariant Hardy inequalities of multiple logarithmic type on the whole space, *Journal of Inequalities and Applications*, (2015) 2015:281,

DOI: 10.1186/s13660-015-0806-1

open access

査読有

Soichiro Katayama, Akitaka

Matsumura and Hideaki Sunagawa,

Energy decay for systems of semilinear wave equations with dissipative structure in two space dimensions,
NoDEA 22, Issue 4 (2015), 601-628.

査読有

Masahiro Ikeda, Soichiro Katayama

and Hideaki Sunagawa,

Null structure in a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations,

Annales Henri Poincaré 16, Issue 2 (2015), 535-567.

査読有

Soichiro Katayama, Toshiaki Matoba

and Hideaki Sunagawa,

Semilinear hyperbolic systems violating the null condition,

Math. Ann. 361, Issue 1-2 (2015), 275-312.

査読有

K. Fujiwara, S. Machihara, T. Ozawa

On a system of semirelativistic equations in the energy space, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 14(2015), 1343-1355.

査読有

Soichiro Katayama, Chunhua Li and

Hideaki Sunagawa,

A remark on decay rates of solutions for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations in 2D,

Differential and Integral Equations 27, no.3-4 (2014), 301-312.

査読有

T. Ozawa, H. Sunagawa

Small data blow-up for a system of nonlinear Schrödinger equations,

J. Math. Anal. Appl., 399(2013), 147-155.

査読有

N. Hayashi, T. Ozawa, K. Tanaka

On a system of nonlinear Schrödinger equations with quadratic interaction, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 30(2013), 661-690.

査読有

K. Rogers, T. Ozawa

Sharp Morawetz estimates,

J. d'Anal. Math., 121(2013), 163-175.

DOI:10.1007/s11854-013-0031-0

査読有

J. Byeon, K. Tanaka
Semi-classical standing waves for
nonlinear Schrodinger equations at
structurally stable critical points of the
potential, J. Eur. Math. Soc.,
15(2013),1859-1899
DOI:10.4171/JEMS/407
査読有

J. Byeon, K. Tanaka
Semiclassical standing waves with
clustering peaks for nonlinear Schrodinger
equations, Memoirs of the American
Mathematical Society, 229(2013)
<http://dx.doi.org/10.1090/memo/1076>
査読有

〔学会発表〕(計 8 件)

Tohru Ozawa
“Life span of solutions to nonlinear
Schrödinger equations on torus”
Workshop on Partial Differential
Equations (招待講演)
March 24-27, 2016
Zhejiang Normal University (Zhejiang,
China)

Tohru Ozawa
“On the Hardy type inequalities”
Second Workshop on Nonlinear Dispersive
Equations (招待講演)
October 6-9, 2015 (10/9)
IMECC-UNICAMP, Campinas, Brazil

Tohru Ozawa
“Finite Time Extinction for Nonlinear
Schrödinger Equation”
Workshop on Nonlinear Partial
Differential Equations (招待講演)
March 14-15, 2015
Zhejiang University, Hangzhou, China

Tohru Ozawa
“Quadratic Interactions in Dispersive
Systems”
「微分方程式の総合的研究」(招待講演)
平成 26 年 12 月 20 日(土)
京都大学理学部(京都府・京都市左京区)

Tohru Ozawa
“古典場の理論に現れる非線型波動方程式”
中央大学理工学部数学教室(招待講演)
Encounter with Mathematics 62 波動方
程式 - 古典物理から相対論まで -
平成 26 年 9 月 15 日(月)
中央大学理工学部(東京都・文京区)

Tohru Ozawa
“Systems of Quadratic Dispersive
Equations”
Roman Summer School and Workshop
KAM Theory and Dispersive PDEs. (招待
講演)
September 8, 2014
the University LA SAPIENZA
(Roma, Italy)

Tohru Ozawa
“Bilinear estimates in the Sobolev spaces”
Analyse Numérique et Equations aux
Dérivées Partielles (招待講演)
2014.1.30
Universite Paris-Sud Laboratoire de
Mathématiques (Paris, France)

Tohru Ozawa
“Mass resonance in a system of nonlinear
Schrödinger equations”
The Asian Mathematical Conference 2013
(AMC 2013) (招待講演)
June 30 (Sun) to July 4 (Thu), 2013
BEXCO (Busan, Korea)

〔図書〕(計 1 件)
M. Sugimoto and T. Ozawa(Eds.),
“Harmonic Analysis and Nonlinear Partial
Differential Equations”, RIMS Kokyuroku
Bessatsu B42, 2013, 170pp

〔その他〕
ホームページ等
小澤徹研究室
<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小澤 徹 (OZAWA, Tohru)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70204196

(2) 研究分担者

田中 和永 (TANAKA, Kazunaga)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20188288

(3) 連携研究者

片山 聡一郎 (KATAYAMA, Soichiro)
和歌山大学・教育学部・教授
研究者番号：70283942

(3) 連携研究者

砂川 秀明 (SUNAGAWA, Hideaki)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)
・准教授
研究者番号：80375394

(3)連携研究者

町原 秀二 (MACHIHARA, Shuji)
埼玉大学・教育学部・准教授
研究者番号：20346373