

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 5 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2016

課題番号：25610050

研究課題名(和文) 6次元ボルツマン方程式ソルバーの開発

研究課題名(英文) Direct integration of the collisionless Boltzmann equation

研究代表者

吉田 直紀 (YOSHIDA, Naoki)

東京大学・大学院理学系研究科(理学部)・教授

研究者番号：90377961

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：自己重力系の進化を追う6次元ボルツマンコードを開発した。その基本スキームは、空間5次あるいは7次精度で、速度分布関数の単調性および正値性を保証し、時間積分をセミラグランジュ的に行うものであるため、従来のボルツマン(ブラソフ)ソルバーよりも高速で実行でき、結果の精度も高い。実際に、自由流やランダウ減衰などのプラズマ物理および自己重力シミュレーションの基本テスト問題に適用し、その解の精度と収束性を確かめた。最終年度には、ニュートリノなどの熱的成分にはブラソフソルバーを用い、ダークマター成分には従来の粒子法を用いるハイブリッドコードを開発し、宇宙論的構造形成シミュレーションをおこなった。

研究成果の概要(英文)：We have developed a new parallel Vlasov-Poisson solver for simulations of self-gravitating systems. the basic scheme is based on spatially 5-th order or 7th order interpolation, and assures monotonicity and positivity preservation of the velocity distribution function. We performed a series of test simulations including free-streaming and nonlinear Landau damping, and confirmed that our new scheme performs better than the other existing methods. In the final project year, we developed a hybrid code that integrates the Vlasov equation to follow the dynamics of cosmic neutrinos, whereas following the structure formation by a conventional N-body method. We performed cosmological simulations using the hybrid code.

研究分野：宇宙物理学

キーワード：ボルツマン方程式 プラズマ物理 宇宙の構造形成 ニュートリノ 数値計算

### 1. 研究開始当初の背景

重力 N 体シミュレーションは天体形成や進化の研究の強力なツールとなっている。N 体シミュレーションは、多数の質点の間の重力相互作用を計算して系を発展する手法であり、その歴史も古く、およそ 1960 年代から宇宙やプラズマ物理の分野で使用されてきた。コンピューターの発展に伴って、使用する粒子の数(すなわち解像度)も文字通り指数関数的に向上してきており、現在では、1000 億個以上の質量粒子を用いた計算が行われている。しかし、連続体の密度場や速度場を超粒子によって離散的に表現するために、サンプルノイズ等、いくつかの問題点が残っている。また、宇宙の構造形成理論では温かいダークマターモデルや、大規模構造の観測からニュートリノ質量に制限を加える手法など、熱的成分を含む構造形成計算が必要になっていた。

一方、計算機能力の向上も著しく、総メモリが 100 テラバイトを超える計算機を使用できる状況にあった。これにより位置、運動量の両方で 3 次元を設定し速度分布関数を表現できるようになり、ボルツマン方程式の積分が現実的になりつつあった。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、無衝突ボルツマン方程式を 6 次元位相空間上で直接積分する超並列計算コードを開発し、その応用として宇宙の構造形成シミュレーションを行う事である。共動座標系を採用した宇宙論的無衝突ボルツマンソルバーを開発し、宇宙のニュートリノ分布を精密に理論計算する。

コード開発の過程で、重力力学およびプラズマ物理学の古典的な問題に取り組み、あらたな物理的知見を得ることも目標とした。

### 3. 研究の方法

速度分布関数を 6 次元位相空間上で積分し、自己重力の効果は Poisson 方程式を通して取り入れる。Vlasov 方程式は位置空間 3 つ、運動量空間 3 つの計 6 つの 1 次元移流方程式に帰着させ、分布関数の単調性、正值性を保証した空間精度が 5 次または 7 次 MPP 法を採用する。時間積分にはセミ-ラグランジアン法を用いることにより一般的な TVD Runge-Kutta 時間積分 MPP 法に比べ計算時間が大幅に短縮でき、更に時間刻み幅が空間解像度に陽には依存しないスキームを構築することができる。

計算コードは段階的に作成し、はじめは 1 次元の移流問題を解き、重力場のポアソン方程式と結合させる。これを多次元化し、最後に共動座標系を採用して膨張宇宙の中での重力非線形進化を追うことのできるコードを開発する。

宇宙の構造形成シミュレーションのため、速度分散の大きいニュートリノは Vlasov 計算、速度分散がほぼないコールドダークマ

ー成分は従来の N 体計算で解くハイブリッドシミュレーションコードを開発する。

### 4. 研究成果

本研究でははじめに、移流方程式の解法について検討を重ね、速度分布関数の移流問題を物理空間および運動量空間で解くために最適なスキームを選別した。正值性を保証する空間 3 次精度の PFC 法、空間 5 次の MP 法、さらにそれらの発展版ともいえる MPP 法などを系統的に調査した。結果として、分布関数の単調性、正值性を保証する MPP 法を採用し、なおかつ各種テストの結果により、空間 7 次精度のものが最適であると結論した(図 1)。重力計算部には、高速フーリエ変換を用いたポアソンソルバーを適用した。空間補間精度を移流方程式ソルバの精度と合致させ、計算コード全体で整合性を保つものにした。

これらの初期成果は主に平成 26 年度に国内外の研究会で発表し、宇宙物理学およびプラズマ物理学の研究者と議論を重ねた。特に、時間積分のセミラグランジュ法は、プラズマ物理学の研究者との議論によって発展したアイデアをもとにしている。

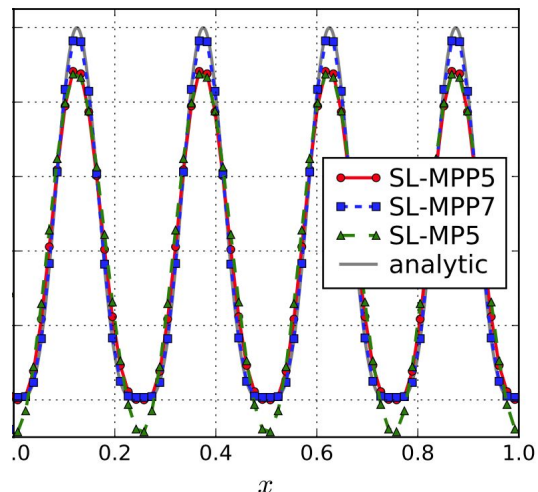


図 1. 本研究で検討した 4 つの移流ソルバーの性能比較。sin<sup>4</sup>(x)関数を、力学的時間の 4 倍の間移流させたあとの解。空間 7 次精度で正值性を保証したスキーム (SL-MPP7) がもっとも解の形を保存している。

開発したスキームを重力崩壊や非線形ランダウ減衰などに適用し、実問題にも適用できる精度をたもつことを確かめた(図 2)。

次に空間次元を拡張し、2 次元、3 次元の実問題に適用した。計算結果は高解像度の N 体計算や、Self-Consistent Field 法とよばれる相空間の進化を厳密にたどる手法の結果と詳細に比較し、速度分布関数の多次元運動量空間での構造が正しく再現されていることをたしかめた。また、移流問題などを通して、積分誤差の空間解像度に対するスケールリングが期待どおりであることも確かめた。

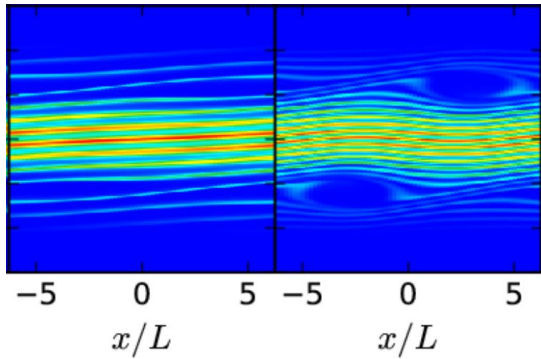


図 2 MPP7 スキームを非線形ランダウ減衰に適用した結果。プラズマ周波数を基準として、 $t=20, 40$  での位相空間構造(縦軸は速度)を表している。数値拡散による混合が抑えられ、シート状の微細構造が保存されている。

3次元ランダウ減衰の計算では、各モードの成長率あるいは減衰率が、線形理論により予言されるものと一致することを確認した。さらに、系が進化した後に発生する再起振動現象や非線形減衰の効果も確認した。これらの成果を論文としてまとめ、2017年2月に *Astrophysical Journal* 誌に投稿した (S.Tanaka et al., arxiv: 1702.0852)。

最後に膨張宇宙での重力非線形進化をおうために共動座標系で記述した無衝突ボルツマン方程式を積分するスキームを開発した。大きな熱速度をもつニュートリノ成分の分布関数の変化を6次元位相空間上で追うことができる(図3)。共動座標系ではボルツマン方程式の運動量移流部分に付加的な項が加わるが、特性曲線の理論を用いて他の移流項と整合的に解くことができる。また、宇宙膨張にしたがって運動量が変化してしまうが、高次の補間精度を採用しているため、初期の運動量最大値を十分大きくとっておけば積分誤差は小さく抑えられることをたしかめた。

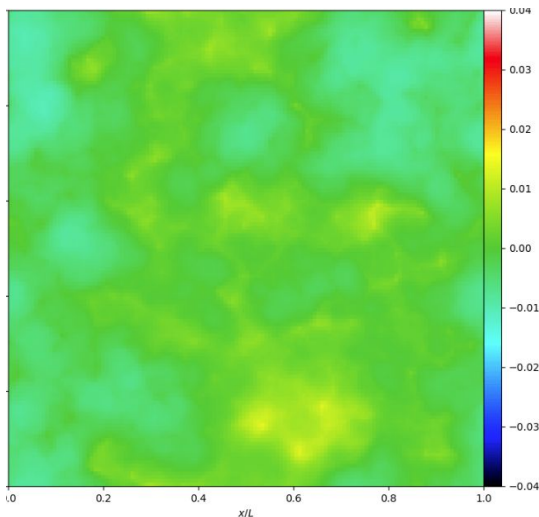


図 3 ニュートリノの宇宙大規模構造。1辺が15億光年の領域の中でのニュートリノの密度分布を表している。ニュートリノの大き

な速度分散のため、薄くひろがっているが、この長さスケールではクラスタリングが現れている。

コールドダークマター成分も含めたハイブリッド計算も行った。熱速度をもつニュートリノがうすく広がることにより、構造形成が阻害される効果は理論的に予想されている。またこの効果を宇宙の大規模構造の観測から検出することも行われている。図4に示すように、我々の非線形計算により、小スケールの構造 ( $k > 0.01/\text{Mpc}$ )でのパワースペクトルの減衰が正確に計算できる。本研究の目的として掲げた、宇宙のニュートリノ分布の計算が可能となった。

今後は開発したスキームをプラズマ物理の諸問題、とくに電磁プラズマの力学進化計算に適用したい。

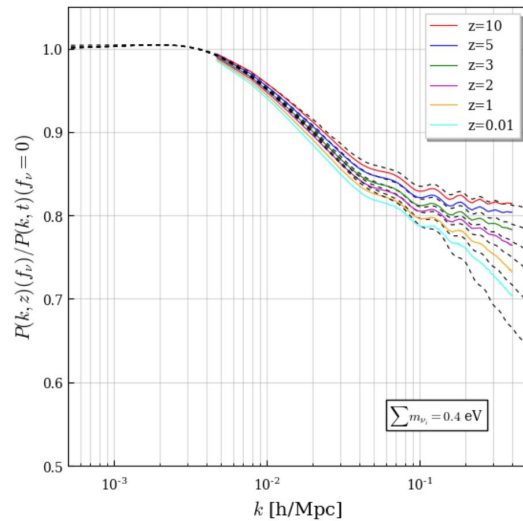


図 4 残存ニュートリノが宇宙の構造形成におよぼす影響。ダークマター成分の密度パワースペクトルの減衰(高周波数側)を摂動論の結果(破線)と比較している。ニュートリノ総質量は  $0.4\text{eV}$  とした。

計算コードはC言語で作成した。3次元位置空間のそれぞれの座標に3次元運動量空間の分布関数を持つ割り当てにし、位置空間を3次元領域分割してMPIによるプロセス並列化を行った。各プロセス内ではOpenMPを用いたスレッド並列化を用いたハイブリッド並列を行っている。また、各スレッド内でSIMD命令を用いたベクトル化を行い、CPU単体での性能を出せるよう最適化しており、14%程度の実行効率を実現している。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計0件)

〔学会発表〕(計6件)

1. 吉田直紀, シミュレーションデータベースと統計学、「京からポスト京へ向けて」シンポジウム、2017年2月16日、筑波大学東京キャンパス(東京都文京区)

2. 吉田直紀, Simulations of Cosmic Structure Formation, The First Computer Alliance Symposium, 2016年11月29日、東京大学(東京都文京区)

3. 田中賢、吉川耕司、吉田直紀、6次元位相空間嬢での Vlasov シミュレーションにおける高次精度化、日本天文学会春季年会、2016年3月16日、首都大学東京(東京都八王子市)

4. 吉田直紀, Multi-Component Cosmological Simulations, SPPEXA Annual Meeting, 2016年1月26日、ドイツ ガーヒング

5. 吉田直紀, Simulations of the Formation of Large-Scale Structure, Dark Side of the Universe, 2015年12月15日、京都大学(京都府京都市)

6. 吉田直紀, Direct Integration of the Collisionless Boltzmann Equation, Exascale Computing in Astrophysics, 2013年9月10日、アスコナ、スイス、

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉田 直紀 (YOSHIDA, Naoki)

東京大学・大学院理学系研究科・教授

研究者番号: 90377961

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

### (4) 研究協力者

田中 賢 (TANAKA, Satoshi)

筑波大学・計算物理研究センター・研究員