

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：24601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2014

課題番号：25610108

研究課題名(和文)八頂点模型における弱い普遍性と双有理幾何学

研究課題名(英文)Weak Universality and Birational Geometry in the Eight-Vortex Model

研究代表者

藤本 雅文 (FUJIMOTO, Masafumi)

奈良県立医科大学・医学部・准教授

研究者番号：30261176

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、二次元可解格子模型の(二点)相関関数の解析で発見された代数曲線の構造を検証する。八頂点模型の厳密解を出発点とし、モンテカルロ法による相関関数の計算を行った。ポッツ模型は相転移点上で六頂点模型と等価になることが知られているが、その高温相において、八頂点模型と同一の代数曲線の構造が確認された。結果、この代数曲線の構造は、(可解で有る無しに関わらず)広い範囲の格子模型に現れる、非常に普遍的なものであることがわかった。代数曲線は、 C_{4v} 、 C_{6v} 等の点群対称性に対応した種数1特異曲線になり、代数幾何における双有理同値の概念と、臨界現象における(弱い)普遍性の概念の密接な関係が指摘された。

研究成果の概要(英文)：In previous studies it was shown that asymptotic behavior of the (two-point) correlation function is expressed in terms of simple algebraic curves of genus 1 for two-dimensional solvable models.

Reexamining the eight-vertex model, we performed Monte Carlo simulations to investigate the correlation function of the Potts model; note that at the phase transition point the model is equivalent to the six-vertex model. Above the phase transition point we found essentially the same algebraic curves as the eight-vertex model. It was strongly suggested that the algebraic curves are quite general ones which represent the correlation functions of a wide class of lattice models, including unsolvable ones.

It was shown that the algebraic curves can be derived from the point group C_{4v} or C_{6v} . We pointed out a relation between the birational geometry and the (weak) universality hypothesis of critical phenomena.

研究分野：数理物理・物性基礎

キーワード：統計力学 数理物理 格子模型 相関関数 平衡形 代数曲線 シミュレーション

1. 研究開始当初の背景

臨界点以下で、ある単一相の中に体積（面積）一定の条件のもと、他の秩序相を混ぜた時の最も安定な形を平衡形という。平衡形は、界面張力の方位依存性（異方性）からルジャンドール変換（ウルフの作図法）を経て導かれる他、界面張力と相関距離の間に成り立つ逆比例関係（裏格子への変換）も考慮すれば異方的相関距離と関連づけることもできる。

平衡形の決定は歴史ある問題であるが、実際にどのような形になるかが明らかになってきたのは、比較的最近のことである。私は通常の転送行列法に並進演算子（shift operator）を導入する新しい方法を考案、二次元可解格子模型に関して平衡形の厳密な導出を行い、いくつかの興味ある結果を得ていた：先ず、平衡形、及び（二点）相関関数の遠距離での振る舞いについて、非常に普遍性の高い代数曲線（種数1の楕円曲線、トーラス）が存在することがわかった。更に、普遍的代数曲線は、C_{4v}、C_{6v}等の格子の点群対称性を反映して決まってしまう可能性が指摘された。

2. 研究の目的

二次元可解格子模型について、発見された代数曲線は、（可解模型の枠を超え）広い範囲の格子模型に共通に現れることが予想される。更に、普遍的代数曲線の存在は、臨界現象におけるスケーリング則、（弱い）普遍性の出現機構と深く関わっていることが示唆される。

今回の研究では、

(1) 八頂点模型等、可解格子模型の厳密計算で見いだされた普遍的代数曲線が解けない模型に関しても出現することを示すこと、

(2) 普遍的代数曲線の出現機構を解明し、臨界現象における、スケーリング則、（弱い）普遍性との関わりを明らかにすること、の二点を研究目的とした。

3. 研究の方法

(1) 解けない模型の相関関数の遠距離での振る舞いを数値的に解析し、普遍的代数曲線の存在を示す。

平衡形でいえば、臨界点付近で形が丸くなること、低温極限（裏格子の高温極限）における多角形については自明であり、この間の温度領域における変形に興味を持たれる。

当初、（ウルフの作図法にならい）① 方向を固定して相関関数を動径方向に漸近評価し、この方向の相関距離を計算する；これを様々な方向について行い、異方性を決定していく方法を検討した。興味を持たれる温度領

域において予想される相関距離の異方性は小さく、この方法では相関関数の漸近形から相関距離を評価する段階でかなりの計算誤差を伴ってしまう為、異方性の正確な評価は困難であることがわかった。

そもそも、相関距離を計算する必要があるわけではなく、我々は、以下の新しい方法を提案、実行した：② ある適当な距離（≧格子間隔）を固定して、円形の領域について相関関数を解析し、その回転対称性がどの程度歪むかを評価することを考える。

主に扱う模型としてはポッツ模型、数値計算の手法としては、モンテカルロ法を用いた。これらの選択は、以下のような理由による：第一に、ポッツ模型は、状態数 $Q=2$ のイジング模型の場合の他、 $Q>4$ の一次転移点上（模型は六頂点模型と等価になる）に関して、厳密計算でき、普遍的代数曲線が確認されていた。第二に、この模型に関しては裏格子変換の存在が示されており、高温の無秩序相、低温の秩序相のどちらかを計算するだけで、両方の解析が可能となる。第三に、ポッツ模型のモンテカルロ法に関しては、優れたアルゴリズムが確立されており、これを利用することができる。

状態数 $Q=1, 2, 3, 4$ のポッツ模型高温相について（ $Q=1$ はボンドパーコレーション）、モンテカルロ法を実行し、相関関数漸近形を以下のように解析した。格子の対称性と厳密計算の結果を用いて、ポッツ模型で可能な相関関数の漸近形を不定パラメータ数個のみを残した形に絞り込むことができる。円形領域について行ったモンテカルロデータを、この予想される漸近形で最小二乗フィッティングして、不定パラメータの決定を行う；相関距離、平衡形はこの数値解より（鞍点法、ウルフの作図法等を経て）二次的に導かれる。

(2) 普遍的代数曲線の出現機構の解明については、八頂点模型における厳密計算を再検討することから始める。転送行列及び並進演算子の固有値の楕円関数表示に関して、楕円関数を定義するリーマン面（トーラス）間に、ガロア被覆の構造があり、更に、附随するガロア群が格子の点群対称性と対応することが示せる。これが、可解模型について、代数曲線を決定する機構である。

(1) のモンテカルロ法で、ポッツ模型に関して代数曲線の構造が確認できれば、可解模型の枠を超え広い範囲の格子模型に同様のガロア被覆の議論が適用できることが強く示唆できる。

出現する代数曲線は、一般に、無限遠にノードを持つ特異曲線になり、可微分構造の観点からは、多様体（manifold）の条件を満たさない。これを扱う数学の処方箋は代数幾何学

の考え方になる：代数多様体 (algebraic variety) としては議論の対象となり、双有理同値は代数幾何学における基礎概念の一つである。

臨界現象の解析において、代数多様体の観点から議論が行われた例はなく、これを行うことにより、スケール則、(弱い) 普遍性の出現機構に新しい知見を与えることが予想される。また、数値解析の方法にも示唆する所大であり、数値解析の方法論的改良を試みる。

4. 研究成果

(1) 先ず、正方格子上イジング模型 (状態数 $Q=2$ のポッツ模型) の高温相で、研究の方法 (1) の ② のモンテカルロ法による計算を行った。結果、精度よく (4桁、5桁精度で) 厳密計算の結果を再導出することに成功した：代数曲線の構造の数値的検証法として、有効性が示せたことになる。

(2) 次に、状態数 $Q=1, 3, 4$ の正方格子上ポッツ模型の高温相について解析を行った。結果、① 相関関数を (イジング模型の場合と同程度の) 高精度でフィッティングすることに成功、代数曲線の構造が確認できた。② 代数曲線は、イジング模型と同様、種数 1 の曲線であるが、③ Q の変化に対応して変形があること、この変形は一つの曲線パラメータで定量評価できることが示された。

状態数 $Q=3, 4$ の場合、③ は以下のような意味を持つ：裏格子変換を経て、低温相における平衡形の決定が同時に行えたことになる。正方格子上ポッツ模型の平衡形については、既に多くの研究例があり、形は (温度スケールを取り直せば) イジング模型の厳密解で非常に良く近似できることが示されていた。今回の研究により、(1%前後の非常に小さな変形ではあるが) Q の変化に対応して形が変わることが明らかになった。

$Q=1$ (ボンドパーコレーション) は、転送行列及び並進演算子を用いた出現機構の説明が適用できない場合であることがわかった；この場合の代数曲線の出現機構の解明は今後の課題となった。

(3) 正方格子上の数値解析に引き続き、三角格子上ポッツ模型の高温相で、相関関数の解析を行った。

先ず、三角格子上イジング模型について、厳密解を精度よく再導出することに成功した。

状態数 $Q=1, 3, 4$ について、正方格子の場合と同じ結果 ①、② が得られたが、 Q の変化に対応した変形については、③' Q が変化しても形は変わらないことが確認された；三角格子の場合、温度スケールを調節すれば、ポッツ模型の平衡形はイジング模型の厳密解と重なってしまうことがわかった。

結論 ③ と ③' の違いは、点群対称性が C_{4v} から C_{6v} となった影響で説明できることが示された。

また、③' は可解格子模型の原理であるスター・トライアングル関係式との関連が指摘できる結論であり、この点を明らかにする為、蜂の巣格子上のポッツ模型の数値解析が現在進行中である。

(4) ポッツ模型のモンテカルロ法による解析結果では、行った全ての場合について、種数 1 の代数曲線の構造が確認された。ガロア被覆の構造を含め、可解模型の枠を越え、広い範囲の格子模型が同様の構造を持つ可能性が指摘できる。

二次元格子模型共通に、種数 1 の代数曲線の構造を持つことは、弱い普遍性の出現と密接に関係することが予想される：二次元格子模型では、相関関数の漸近形が SN 関数で表示できることになり、相関関数は補ノーム $q \rightarrow 0$ の極限で臨界異常を示す；そして、補ノーム q で計算した指数は弱い普遍性の指数に対応する。(補) ノームが非常に重要な役割を果たすことがわかる。

このことをふまえた数値計算の方法として、以下のような方法を提案した：例えば、温度の臨界指数を計算する場合でも、温度による展開を直接扱うのではなく、第一に、補ノーム q で弱い普遍性の指数を計算し、第二に、温度を q の関数として展開、指数 ν を計算する；そして、積をとればよい。第一の展開は、通常の楕円関数論というノーム展開であり、収束が非常によいことが知られている。一方、第二の展開も八頂点模型との類推から、収束がよいことが予想される；実際に、状態数 $Q=1, 3, 4$ の今回の結果を用いて計算してみた所、 $T \sim 8.0 T_c$ くらいまでの温度領域でよい収束性が確認された。

正確に臨界点の解析ができるだけでなく、臨界点から離れた地点から臨界異常を評価できる可能性がある。繰り込み群の方法との関係も指摘でき、この方法について、更なる研究が進行中である。

研究成果 (1) - (3) は、連携研究者である大塚博巳助教 (首都大東京) との共同研究で得た結果である。これらの成果について、学会発表が既に行われており、現在専門誌に投稿準備中である。

研究成果 (4) を得るにあたっては、代数幾何学考察の部分について、研究協力者である本学数学教室の藤本圭男教授に適時アドバイスをいただいた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 4 件)

- ① 藤本 雅文、大塚 博巳、代数曲線を用いた格子模型の臨界現象の解析、日本物理学会第70回年次大会、2015年03月21日～2015年03月24日、早稲田大学(東京都新宿区西早稲田)
- ② 藤本 雅文、大塚 博巳、ポッツ模型における二点相関関数と普遍的代数曲線 II: 高温相における解析、日本物理学会2014年秋季大会、2014年09月07日～2014年09月10日、中部大学(愛知県春日井市松本町)
- ③ 藤本 雅文、大塚 博巳、ポッツ模型における二点相関関数と普遍的代数曲線 I: 数知的検証、日本物理学会第69回年次大会、2014年03月27日～2014年03月30日、東海大学(神奈川県平塚市北金目)
- ④ Masafumi Fujimoto、Hiromi Otsuka、Anisotropic Correlation Length in Two-Dimensional Ising Model、XXV IUPAP International Conference on Statistical Physics、2013年07月22日～2013年07月26日、Seoul (Korea)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤本 雅文 (FUJIMOTO, Masafumi)
奈良県立医科大学・医学部・准教授
研究者番号: 30261176

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

大塚 博巳 (OTSUKA, Hiromi)
首都大学東京・大学院理工学研究科・助教
研究者番号: 10254145

(4) 研究協力者

藤本 圭男 (FUJIMOTO, Yoshio)
奈良県立医科大学・医学部・教授
研究者番号: 90192731