様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：若手研究(A)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５７０００２

研究課題名（和文）確率的アルゴリズムにおける乱数の果たす機能と効果の究明

研究課題名（英文）Understanding the function and effect of randomness in probabilistic algorithms

研究代表者
来嶋　秀治（Kijima, Shuji）

九州大学・システム情報科学研究科（研究院・准教授

研究者番号：７０４５２３０７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　6,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では，計算における乱数の機能の解明に向け，「乱択アルゴリズムの設計」と「脱乱択化の新理論の構築」の両研究を推進した．この目的に沿って，確率構造および離散構造の理解の深化と応用の研究も並行して進めた．とくに脱乱択化の新技法の構築に向けて，決定性ランダムウォークの設計と解析技法の開発に取り組み，成果を得た．また当初の想定を超える成果として，自律分散ロボットの対称性を解消する決定性アルゴリズムの開発に成功し，乱数の機能のひとつである対称性の解消が決定性計算で置き換え可能であることを示した．

研究成果の概要（英文）：Motivated by the question if randomness is really necessary for computing, this research project has investigated the theory of designing randomized algorithms and has developed new technology for derandomization. For the purpose, this project has also investigated the random structures and discrete structures. Concerning the technology of derandomization, we have designed some deterministic random walks and gave analyses on them developing new techniques. Beyond the plan, we have also developed a deterministic algorithm for some symmetry breaking in distributed autonomous robots, which implies that some randomness for symmetric breaking is possible to be replaced.

研究分野：情報学基礎理論

キーワード：アルゴリズム理論　離散構造　マルコフ連鎖　脱乱択化

１．研究開始当初の背景

アルゴリズム設計において，確率的手法は，簡便さ，性能の良さ，大数の法則に保証される頑強さを理由に，現実的にも理論的にも不可欠な基本的で重要な手法である．一方で，理論/実用の両側面において,(疑似)乱数の“性能”がアルゴリズムに与える影響は小さくない．

「確率的アルゴリズムにおいて，乱数に真に求める性質は何であろうか？」本研究の根源的な動機はこの疑問にある．決定性の計算と確率的計算の性能の差異は，P vs BPP に代表される長年の重要な課題である．中でも，確率的計算の要素技術であるランダムサンプリングと密接な関係をもつ#P などの数え上げ計算量クラスは理論計算機科学の重点的な課題として 1980 年代からの多くの研究蓄積をもつ．この分野の標的課題であったパーマネントの計算（2 部グラフの完全マッチングの個数）の多項式時間乱択近似可能性が 2004 年に肯定的に解決されて以降，#P 困難問題に対する決定性近似の可能性/不可能性の解決は重要な課題であるが，いくつかの個別の課題に対する結果が散見されるのみで，革新的な技術の開発が望まれている．

２．研究の目的

本研究の根源的疑問の究明を長期展望に据え，本課題では「乱択アルゴリズム（randomized algorithm）の設計」と「脱乱択化（derandomization）の理論」の両研究に取り組む．一見相反する方向の２つの課題を通じ，「計算における乱数の機能」を明らかにしていくことが本課題の目的である．

課題の解決に向けては，問題構造の活用が不可欠である．本課題では，特に確率構造や離散構造に焦点をおき，現実問題に起因する問題をはじめとする構造の応用，あるいは理解の深化も主要な目的とする．

３．研究の方法

本課題ではアルゴリズム理論の進展と，理論の現実社会への還元の両側面から，以下の 3 つのテーマを柱として研究を遂行した．

[テーマ 1] ランダム生成アルゴリズムの設計：確率構造，離散構造に着目し，効率的なランダム生成アルゴリズムの設計に取り組んだ．

[テーマ 2] 確率構造，離散構造の理解：とくに現実に起因する問題に対し，問題の構造を深く理解し，効果的に乱択化することで，簡便で実用的なアルゴリズムの設計に取り組んだ．

[テーマ 3] 脱乱択化の新理論の構築：ランダムウォークの脱乱択化の研究に取り組んだ．

これらのテーマは，本研究課題において密接に関連するため，テーマ間にわたって連携して研究を遂行した．

４．研究成果

[概要]

「乱択アルゴリズム設計・解析」と「脱乱択化の理論」の両研究を進めた．脱乱択化の理論に関しては，決定性ランダムウォークの研究を推進し，単一頂点誤差の解析で未解決だった問題を肯定的に解決した．一方で，総変動誤差に関する研究に関しては，素朴な技法の限界を示す成果を得て，脱乱択化の理論構築に向けた新たな課題を明らかにした．

乱択アルゴリズム設計・解析の研究においては，単純経路数え上げ問題などの著名な指標的課題や，ストリーミングアルゴリズム，オンライン学習，暗号強度に関する離散対数問題の理論解析などに取り組み成果を得た．

確率構造，離散構造の研究もすすめ，パリティハミルトン閉路問題などの新たな視点に基づくグラフアルゴリズムの結果を得た．

想定外の成果としては，デッドロック解消を動機として分散計算論で研究の盛んな自律分散ロボットの対称性の解消問題に関して，決定性アルゴリズムによる解決，すなわち乱数を必要としない手法を発見した．

いくつかの代表的な個々の課題について，詳細を以下に述べる．

(1) 決定性ランダムウォーク

本課題の先行研究[1]では，本質的に有理数の推移確率行列に対応する決定性ランダムウォークの解析を行っていたが，[2]（速報版は雑誌論文⑤：完全版は査読付き雑誌に投稿中）では，無理数の遷移確率をもつマルコフ連鎖に対応する決定性ランダムウォークを考案し，さらにマルコフ連鎖の混交時間（mixing time）を用いた単一頂点誤差の解析技法を構築した．数え上げ困難（#P 困難）問題に対するマルコフ連鎖モンテカルロ法設計の文脈において特に重要な高速混交（rapidly mixing）するマルコフ連鎖に対して，入力の多項式サイズの単一頂点誤差が得られるかという問いに対して，最小残余時間法（shortest remaining time）や古典的な超一様列である van der Corput 列などを用いた決定性のランダムウォークによって実現可能であることを示し，未解決問題を肯定的に解決した．

一方で，MCMC 法の脱乱択化技法を目指すにあたっては，単一頂点誤差ではなく総変動誤差の解析が必要となるが，これに関しても混交時間を用いた上界を与えるとともに，誤差が大きくなるような人工的な悪い入力例を与えて下解を与えた．この結果は，決定性ランダムウォークを MCMC 法の代替として素朴に適用すると，誤差が大きくなる例が存在することを示唆する．MCMC 法の脱乱択化に向けては，問題の構造を応用するなどの工夫が今後必要となる．

上述のとおり，本研究の主題は「確率的計算は決定性に置き換え可能か」という点にある．この主題に沿って，決定性ランダムウォ

ークでは MCMC 法は本質的に置き換え不可能ではないのかという観点からも研究を進め，決定性ランダムウォークの計算能力という観点から，決定性ランダムウォークの周期についての研究も行った．すなわち，もし決定性のランダムウォークの周期が短ければ，その計算能力は低いということが示唆される．この疑問に対し，複数トークンの決定性ランダムウォークでも長周期となる例を構成し（学会発表①），すなわち決定性ランダムウォークによって MCMC 法が置き換え不可能という直接的な証拠は得られなかった．

MCMC 法の脱乱択化可能性は今後の大きな継続研究課題である．

(2) 乱択アルゴリズムの設計

組合せ爆発の啓蒙的課題としても著名な nxn 格子上の s-t 単純経路数え上げ問題（おねえさん問題[3]）に対して，マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC 法）に基づく乱択近似アルゴリズムを設計し，実装および計算機実験を行った（学会発表②）．厳密解に対する現在の世界記録は n=26 の場合で，解はおよそ 1.74×10^{164} であることが知られる．厳密解の計算には ZDD に基づくアルゴリズムが用いられ， 80 コアのスーパーコンピューターを用いて約１週間の計算時間がかかる．本アルゴリズムに基づく実験では 100x100 の解の個数の近似値として 6.1×10^{2415} が得られた．計算には通常のデスクトップ PC を使用して約 24 時間の計算でこの値を求めている．

(3) 離散構造

① ポピュラーマッチング

現実問題に起因する問題の解明にむけ，安定結婚問題におけるポピュラーマッチングの解構造の研究を行った．参加人数最小のポピュラーマッチングに参加する人が一意であることが知られていたが，最大ポピュラーマッチングについても参加できる人が一意であることを示した（学会発表③）．

② 偶奇性ハミルトン閉路問題

たとえば統計物理で重要な Ising モデルにも表れるように，偶奇性はランダムサンプリングの設計においても重要な課題である．偶奇性の離散構造を動機として，グラフ上の偶奇性に関する新たな問題を考案し，その構造について研究を行った．新たな問題にはパリティハミルトン閉路問題と名付け，与えられたグラフ上のすべての頂点をそれぞれ奇数回訪問する（単純とは限らない）閉路が存在するかという問題である．同一頂点を複数回訪問してよい．

この問題に対し，各辺を何回利用しても良いならば，多項式時間で解けることを示す一方，各辺の利用回数に制限を加えると NP 完全となることを示した[4]．また，有向グラフの場合はブール方程式を解くことで多項式時間可解であること示した（雑誌論文③）．

③ その他離散構造，確率構造

このほか離散構造と確率構造に関して，木距離近似，剛性グラフの列挙，劣モジュラ関数の構造，離散対数問題に対するアルゴリズムの解析，データ構造のオンライン学習アルゴリズムの設計・開発，ストリーミングデータに対する確率的アルゴリズムなどの成果を得た．

(4) 対称性の解消

哲学者の食事に代表される対称性に基づくデッドロックの解消は，計算機科学の重要な課題である．一方，対称性の解消は乱数のもつ重要な機能の一つである．乱数のもつこの機能を決定性の計算で置き換え可能であるかという疑問は，大変興味深い課題ではあったが，本研究課題の開始当初はまったく見当のつかない状況であった．

分散計算論において，自律分散ロボットの計算論は非常に盛んな研究テーマであるが，従来研究は２次元空間に限定されていた． ３次元空間中のこの問題に対し，例えば，正四面体の頂点上に配置された 4 台のロボットや立方体の頂点上に配置された 8 台のロボットを通信や乱数などの外部入力なしで自律的に対称性を解消できるかという問題に取り組み，驚くべきことに決定性のアルゴリズムによって対称性が部分的には解消可能であることを示した．鳩の巣原理を利用する素朴なアイデアがこの画期的な解決に重要な役割を果たした．雑誌論文①などでは，対称性解消の可能性/不可能性に関する特徴づけを与えている．この結果は特に分散計算理論の分野の画期的な成果として大きな注目を集めており，計算機科学の最高峰誌 Journal of the ACM に採録が決定している．

[1] S. Kijima, K. Koga, K. Makino, Deterministic random walks on finite graphs, Random Structures & Algorithms, 46 (2015), 739--761.

[2] T. Shiraga, Y. Yamauchi, S. Kijima, M. Yamashita, Deterministic random walks for rapidly mixing chains, arXiv:1311.3749, 2013.

[3] 日本科学未来館,『フカシギの数え方』おねえさんといっしょ！みんなで数えてみよう！, YouTube, 2012/9/10 公開, https://www.youtube.com/watch?v=Q4gTV4r0zRs

[4] H. Nishiyama, Y. Kobayashi, Y. Yamauchi, S. Kijima, M. Yamashita, The parity Hamiltonian cycle problem, arXiv:1501.06323, 2015.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線）

〔雑誌論文〕（計９件）

① Y. Yamauchi, T. Uehara, S. Kijima, and M. Yamashita, Plane formation by synchronous mobile robots in the three dimensional Euclidean space, Journal of the ACM, **掲載決定済.査読有**

② T. Shiraga, Y. Yamauchi, S. Kijima, and M. Yamashita, Total variation discrepancy of deterministic random walks for ergodic Markov chains, Theoretical Computer Science, **掲載決定済．査読有**
DOI: 10.1016/j.tcs.2016.11.017

③ H. Nishiyama, Y. Yamauchi, S. Kijima, M. Yamashita, The parity Hamiltonian cycle problem in directed graphs, Lecture Notes in Computer Science book series, 9849 (2016), 50--58. **査読有.**
DOI: 10.1007/978-3-319-45587-7_5

④ S. Kijima, R. Montenegro, Collision of random walks and a refined analysis of attacks on the discrete logarithm problem, Lecture Notes in Computer Science, 9020 (2015), 127--149. **査読有.**
DOI: 10.1007/978-3-662-46447-2_6

⑤ T. Shiraga, Y. Yamauchi, S. Kijima, M. Yamashita, L∞-discrepancy analysis of polynomial-time deterministic samplers emulating rapidly mixing chains, Lecture Notes in Computer Science, 8591 (2014), 25--36. **査読有.**
DOI: 10.1007/978-3-319-08783-2_3

〔学会発表〕（計４９件）

① **玉谷賢一，山内由紀子，来嶋秀治，山下雅史，トークンが出会うことのない長周期のローターウォーク，冬の** LA **シンポジウム** 2016，**京都大学数理解析研究所，** 2017 年２月１日-3 日（２月３日）.

② **柴田友樹，山内由紀子，来嶋秀治，山下雅史，おねえさんの問題の乱択近似，基盤**(S) **離散構造処理系プロジェクト**「2016 **年度 初夏のワークショップ**」，**北海道大学（北海道，札幌市）**，2016 **年** 6 **月** 17-18 **日** (6 **月** 17 **日**)，**ポスター**.

③ M. Hirakawa, Y. Yamauchi, S. Kijima, M. Yamashita, On the structure of popular matchings in the stable marriage problem - who can join a popular matching?, the 3rd International Workshop on Matching Under Preferences (MATCH-UP 2015), Glasgow, UK, April 16-18, 2015 (April 17).

④ S. Kijima, Deterministic random walks on finite graphs, Workshop "Random Walks on Random Graphs and Applications," Eindhoven, The Netherlands, April 14-16, 2015 (April 15). **招待講演**

〔その他〕
ホームページ等
http://tcslab.csce.kyushu-u.ac.jp/~kijima/index_j.html

６．研究組織

(1)研究代表者

来嶋　秀治（KIJIMA, Shuji）
九州大学・大学院システム情報科学研究**院・准教授**
研究者番号：70452307