

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25780127

研究課題名(和文) 動学社会ゲームと確率近似

研究課題名(英文) Dynamic Societal Games and Stochastic Approximation

研究代表者

尾山 大輔(OYAMA, Daisuke)

東京大学・経済学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：00436742

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、決定論的マクロ経済的動学と有限プレイヤー確率ゲームを接続ような分析枠組みを構築することで、プレイヤーの数が十分大きいときの近似定理を得ること、また、社会ゲームや数学的に関連する理論に基づいた均衡選択の結果に関する理解を深めることであった。非同時手番ノイズ付き確率ゲームに関する確率近似、一般の優モジュラー・ネットワーク・ゲームにおける行動伝播、決定論的進化動学に基づく均衡選択、確率の小さい事象の高階信念に対する影響などについて新しい結果・知見を得ることができた。これらは国際的査読学術誌や学会において発表された。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this project has been to develop a theoretical framework which connects deterministic macroeconomic dynamics with a continuum of players with finite-player stochastic games, thereby establishing approximation results as the number of players tends to infinity, and to enhance our understanding on equilibrium selection results based on societal games and mathematically related theories. I obtained new results and insights on stochastic approximation of asynchronous-move noisy stochastic games, contagion of behavior in general supermodular network games, equilibrium selection based on a new class of deterministic evolutionary dynamics, and the impact of small probability events on higher order beliefs. These have been published or reported in international refereed journals and conferences.

研究分野：経済理論・ゲーム理論

キーワード：societal game dynamic game equilibrium selection potential game supermodular game economic growth agglomeration

## 1. 研究開始当初の背景

社会ゲームの理論は、ゲームが社会の中で時間を通じて多数の主体の間で繰り返しプレイされる過程を明示的に考え、その動学過程の中での社会の行動パターンの遷移や安定性を分析するものである。本研究開始までに研究代表者は、均衡が複数存在する状況において長期的に見てどの均衡がより実現しやすいかという均衡選択の問題を社会ゲームの視点から分析してきた。とくに、完全予見動学 (perfect foresight dynamics) の下で安定となる均衡の性質をいくつかのゲームのクラスに対して調べ成果を得た。たとえば、「 $p$ -支配均衡」あるいは「反復  $p$ -支配均衡」、また「単調ポテンシャル最大化均衡」あるいは「反復単調ポテンシャル最大化均衡」は完全予見動学の下で (割引率が十分小さいときに) 唯一の大域安定均衡になることを示した。

上述の研究ではすべて連続体の主体が仮定され、これに依拠して (i) 個人レベルの行動変更に関するランダムネスは経済全体での集計レベルでは消え動学は決定論的 (deterministic) となり、(ii) 各個人一人の戦略的行動は経済全体の行動には影響を与えない、と暗黙裏に仮定されている。これらの仮定はモデルの解析を (比較的) 容易にすることに寄与しているが、現実の経済は多数の、有限の主体から構成されているものである。理論的にも、上記の (i)、(ii) を最初から仮定するのではなく、有限人のプレイヤーからなるゲーム理論モデルを構築し、そのモデルの (プレイヤーの数が十分大きいときの) 均衡での性質として導出すべきである。

また、「(反復)  $p$ -支配均衡」や「単調ポテンシャル最大化均衡」などの均衡概念が完全予見動学以外の均衡選択理論においてどのような性質を持つかを調べることは、これらの均衡概念、あるいは均衡選択のアプローチの深い理解につながると期待される。

## 2. 研究の目的

(1) 有限人のプレイヤーからなり、プレイヤーの数が十分大きいときに (i)、(ii) の性質が満たされるよ

うな動学ゲームを構築・分析する。とくに、正の外部性のため均衡が複数存在するような状況を念頭におき、均衡選択を導くことができる動学「完全予見動学」によって有限モデルの振る舞いが近似できるための条件を明らかにし、その下で現実の経済現象に関する新しい知見を得ることを目的とする。

(2) 社会ゲームおよび関連する枠組みによる均衡選択理論を深化・発展させる。上で述べた均衡概念が様々な均衡選択アプローチにおいてどのような性質を持つかを調べることで、均衡概念・均衡選択アプローチに関する深い理解を得ることを目指す。

## 3. 研究の方法

(1) 有限人 ( $N$  人とする) のプレイヤーたちからなる確率ゲーム (stochastic game) モデルを構築し、そのゲームの、 $N$  が十分大きいときの均衡の振る舞いが、完全予見動学 (連続体プレイヤーの決定論的動学) の均衡経路によって近似できるための条件を明らかにする。

(2) 各プレイヤーは社会の行動分布を正確に知ることはできず、プレイされている行動のサンプルをとってそれに対する最適反応を行う、という社会ゲーム動学過程「サンプリング最適反応動学」において、「反復  $p$ -支配均衡」の安定性を吟味する。

典型的な  $2 \times 2$  協調ゲームの範囲を超えた、より広い優モジュラー・ゲームに対して、ネットワーク上での行動の伝播を分析する。

(完全予見動学を含む) あるクラスの動学社会ゲームは、抽象的には不完備情報ゲームと同様の数学的構造を持つが、不完備情報ゲームに関する分析道具である「信念演算子」の拡張版に対し、「単調ポテンシャル」を定義し、その性質を探る。

## 4. 研究成果

(1) 有限人プレイヤーからなる確率ゲームを考え、プレイヤー数  $N$  が十分大きいときの均衡の振る舞いが完全予見動学によって近似されるための条件を

明らかにした。次のような離散時間の確率ゲームを考える。簡単化のため状態空間は行動分布全体の集合と同相とする。各プレイヤーの行動改訂の機会は独立なポアソン過程に従うとする。状態は選ばれた行動とノイズに依存して遷移する。このゲームの完全マルコフ均衡に注目し、プレイヤーの数  $N$  を増やしていったときの極限の振る舞いを完全予見動学(連続体プレイヤーの決定論的動学)の均衡経路で近似することを考える。論点は2つで、(i) 集計レベルでランダムネスが消えるためにはノイズは大きすぎてもいけない、(ii) 従来の繰り返しゲームでのフォーク定理的な効果がマクロ経済レベルで発生しないようにするにはノイズは小さすぎてもいけない。これらの要請をバランスするような適切な条件を定式化し、この条件の下で、(i) どんな  $\varepsilon > 0$  と時間  $T$  に対しても、 $N$  を十分大きくとれば、どんな均衡状態遷移も完全予見動学の均衡経路で  $[0, T]$  上で  $\varepsilon$ -近似される、(ii) どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $N$  を十分大きくとれば、どんな均衡経路上の利得も、「自分一人の行動変更は状態遷移に影響を与えない」という仮定の下で計算した利得で  $\varepsilon$ -近似される、ということを示した。この結果をゲーム理論の学会において報告した(学会発表①)。学会発表でのフィードバックをもとに、研究のさらなる発展を目指している。

(2) ネットワークでつながったプレイヤーたちの行動伝播の分析を行った。与えられたネットワークにおいて、各ノードがプレイヤーに対応する。各プレイヤーは与えられたゲームを自らとつながっているノード上のプレイヤーたちに対してプレイする。まず、「同時に2つの行動様式を(コストをかけて)備える」というオプション付きの協調ゲーム(“Bilingual Game”)を考え、ネットワーク全体に伝播しうる行動、また逆に、他の行動に侵入されない行動の特徴づけを与えた。とくに、“bilingual”オプションのコストが小さいとき(大きいとき)はパレート支配均衡(危険支配均衡)が伝播行動となり、中間ケースにおいてはネットワークに応じてそれぞれが伝播しうることを示した。次に、一般

の  $n$  行動優モジュラー・ゲームを考え、単調ポテンシャル最大化均衡が侵入に対して頑健な均衡であることを示した。また、行動の伝播のしやすさをもってネットワークを(半順序を通じて)分類するというアプローチを提案し、“weight-preserving node identification”という分析ツールを開発した。本研究は *Journal of Economic Theory* に受理・公開された(雑誌論文①)。

連続体プレイヤーを持ち決定論的動学でありながら均衡選択を導くモデル「サンプリング最適反応動学」に関する研究の発展・拡張を行った。標準的な最適反応動学においては、すべてのプレイヤーは社会全体の行動分布を正確に把握し、それに対して最適反応を行うと想定される。それに対してこの動学においては、各プレイヤーは社会の行動分布を正確に知ることはできず、プレイされている行動のサンプルをとってそれに対する最適反応を行う。Oyama and Tercieux (2009, JET) で開発された「反復  $p$ -支配」という概念を用いて安定状態の特徴付けを考え、サンプルサイズが  $k$  ならば、反復  $1/k$ -支配均衡が大域安定性の十分条件であり、かつ優モジュラー・ゲームにおいては必要条件でもあることを示した。これら結果のためにそれぞれ「推移定理(transitivity theorem)」「比較定理(comparison theorem)」という定理を証明した。さらに、サンプル数が集団内で分布することを許すケースに拡張し、均衡選択の結果が現れるための十分条件を与えた。本研究は *Theoretical Economics* に受理・公開された(雑誌論文②)。

均衡の情報頑健性の分析における高階信念アプローチとポテンシャル最大化アプローチとの関係を明らかにするような分析に着手した。高階信念を分析するための標準的概念である「信念演算子」の拡張版を考え、さらに信念演算子(のプロファイル)に対して「単調ポテンシャル」を定義する。Kajii and Morris (1997) は、任意の事象  $E$  と事前確率と  $E$  の共有信念(common belief) 事象の事前確率との関係づける「臨界経路定理(Critical Path Theorem)」と呼ばれる定理を証明しているが、拡張版信念演算

子とそれに対する単調ポテンシャル概念を用いてこの定理を一般化した。予備的な結果をいくつかの学会・セミナーにおいて発表した(学会発表②)。得られた結果をより深めるべく研究を継続する。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

① Daisuke Oyama and Satoru Takahashi, “Contagion and Uninvadability in Local Interaction Games: The Bilingual Game and General Supermodular Games,” *Journal of Economic Theory*, Vol.157, 100-127 (2015). (査読有)

② Daisuke Oyama, William H. Sandholm, and Olivier Tercieux, “Sampling Best Response Dynamics and Deterministic Equilibrium Selection,” *Theoretical Economics*, Vol.10, No.1, 243-281 (2015). (査読有)

[学会発表] (計2件)

① 尾山 大輔, “Mean-Field Approximation of Forward-Looking Population Dynamics” (joint with Ryota Iijima), ゲーム理論ワークショップ2016, 東京大学, 東京都文京区, 3/7, 2016.

② Daisuke Oyama, “Generalized Belief Operator and the Impact of Small Probability Events on Higher Order Beliefs” (joint with Satoru Takahashi), 13th SAET Conference on Current Trends in Economics, MINES ParisTech, Paris, France, 7/23, 2013.

[その他]

[www.oyama.e.u-tokyo.ac.jp](http://www.oyama.e.u-tokyo.ac.jp)

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

尾山 大輔 (OYAMA, Daisuke)

東京大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号：00436742