

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 31 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25780150

研究課題名(和文) モーメント不等式モデルの経験尤度に基づくベイズ推定

研究課題名(英文) Bayesian estimation of moment inequality models using empirical likelihood

研究代表者

末石 直也 (Sueishi, Naoya)

神戸大学・経済学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：40596251

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、経験尤度をベイズ推定の尤度として用いるベイズ推定の方法を提案し、モーメント不等式モデルの推定に応用した。事後分布の漸近的な性質を明らかにするとともに、経験尤度をベイズの尤度として用いることの有限標本での妥当性について検証した。

また、本研究では、条件付モーメント制約モデルのleast favorableモデルを求めた。さらに、この結果を用いて、モデルの効率性の限界を導出するとともに、漸的に効率的な推定量を提案した。この推定量は条件付モーメント制約モデルの経験尤度推定量として解釈することができる。

研究成果の概要(英文)：This study proposed a Bayesian estimation method that uses an empirical likelihood as a likelihood function, and applied the method to the estimation of moment inequality models. I showed asymptotic properties of the posterior density. Furthermore, I investigated finite sample validity of using an empirical likelihood as a likelihood of Bayes estimation.

Moreover, this study derived a least favorable submodel of conditional moment restriction models. The result suggests the efficiency bound and an asymptotically efficient estimator. The resulting estimator can be viewed as an empirical likelihood estimator for conditional moment restriction models.

研究分野：計量経済学

キーワード：経験尤度 モーメント不等式 ベイズ推定 効率性の限界

1. 研究開始当初の背景

計量経済学では近年、パラメータを一意的に識別することができない統計モデルである、部分識別モデルにまつわる研究が盛んに行われている。パラメータが点識別されないとき、つまり一意に定まらないとき、観測データと整合的なパラメータの値の集合は識別集合と呼ばれる。真のパラメータは、識別集合のいずれかの点に対応している。推定に伴うサンプリング・エラーと比較して、識別集合が妥当な大きさの集合であれば、パラメータが点識別されなくても、上限や下限を知るだけでも十分に意味のある情報を得ることが可能である。

部分識別モデルの中でも重要なクラスのひとつに、モーメントに関する不等式制約によって記述されるモーメント不等式モデル (moment inequality model) がある。モーメント不等式モデルは、データの分布の関数形を仮定しないセミパラメトリックモデルであるため、尤度関数を必要とするベイジアンの研究は少なく、頻度論的な研究が主流である。しかし、ベイズ推定には以下のような利点がある。第一に、パラメータの事前分布を設定することができ、かつ、(擬似)尤度が与えられれば、パラメータが点識別されているかどうかにかかわらず、ベイズ推定は可能である。第二に、真のパラメータの事後分布が得られれば、単に識別集合が推定できるだけでなく、真のパラメータが識別集合上でどのように分布しているかという追加的な情報を得ることができる。

これらのベイズの利点を生かすべく、Liao and Jiang (2010, Ann. of Stat.) は、制限情報尤度と呼ばれる擬似尤度をを用いたベイズの推定方法を提案している。これに対し本研究では、経験尤度をを用いたベイズ推定法を提案する。経験尤度は元来、パラメータが点識別されるセミパラメトリックモデルに対して定義されていたものであるが、Canay (2010, J. of Econometrics) によって示されているように、モーメント不等式モデルについても自然に定義することが可能である。

2. 研究の目的

(1) Liao and Jiang (2010) の制限情報尤度の妥当性の根拠は漸近理論に限定されており、ベイズにおいて重要な有限標本での妥当性については議論されていない。一方、経験尤度はノンパラメトリックな尤度として解釈され、パラメトリックモデルにおける尤度と様々な点において類似性を有している。しかしながら、類似性だけでは、理論的根拠としては薄弱である。そこで、本研究では、経験尤度を尤度として用いたときの事後分布の漸近的な性質を調べるとともに、ベイズの尤度として用いることの有限標本での

妥当性も検証する。

(2) パラメータが点識別可能なモーメント制約モデル (moment restriction model) においても、経験尤度を尤度として用いていることの妥当性に関する議論がなされている。妥当性をサポートするひとつの根拠として、経験尤度は近似的にセミパラメトリックモデルの least favorable モデルの尤度とみなせることが挙げられる (Owen 2001)。本研究では、条件付モーメント制約モデル (conditional moment restriction model) における least favorable モデルを導くとともに、経験尤度との関係を明らかにする。

3. 研究の方法

上記の2つの研究の目的に対して、それぞれ次のような方法で研究を行う。

(1) 次の3点を考察する。

経験尤度を尤度として用いたときの事後分布の漸近的な性質を調べる。特に、識別集合の中と外での事後分布の振る舞いの違いを調べる。また、等式制約がバインドするかどうかで事後分布の性質がどのように異なるかについても考察する。Canay (2010) で示されているように、モーメント不等式モデルにおける経験尤度比統計量は漸近的にピボタルではなく、漸近分布はバインドする等式制約の数に依存する。このことは、モーメント制約がバインドするかどうかで、事後分布の漸近的な振る舞いが変わることを示唆する。

有限標本での妥当性を検証する。Monahan and Boos (1992, Biometrika) は、標本の同時密度関数以外のものを尤度の代替として用いることの妥当性の根拠として、ひとつの基準を提案している。経験尤度がこの基準を満たすかどうかを検証する。

別のアプローチとして、Schennach (2005, Biometrika) で提案されている exponential tilting をした経験尤度 (ETEL; exponentially tilted empirical likelihood) をモーメント不等式モデルのベイズ推定に応用する。

(2) Severini and Wong (1992, Ann. of Stat.) は、条件付パラメトリックモデル (conditionally parametric model) と呼ばれるクラスのセミパラメトリックモデルの least favorable モデルの求め方を示している。条件付モーメント制約モデルはそのままではこのクラスに含まれないが、凸解析の双対定理と組み合わせることで、least favorable モデルを求める。

4. 研究成果

(1)

事後分布に性質に関しては、次の結果を得た。まず、識別集合に含まれない点における事後密度関数は、サンプルサイズに関する指数のオーダーで0に近づく一方で、識別集合に含まれる点については、漸近的に正の値を取ることがわかった。つまり、識別集合の中と外では、事後分布の振る舞いは明確に異なることがわかった。また、このことはモンテカルロシミュレーションによっても確認された。さらに、バインドする制約が無い場合には、経験尤度を用いても、事前分布はアップデートされないことも明らかになった。つまり、いくつかの制約は不等式ではなく等式で満たされなければ、経験尤度にはサンプルの情報がないということになるが、これは直感的にも明らかな結果といえる。これらの結果はどれも Liao and Jiang (2010)の制限情報尤度を用いた結果と類似するものである。

Monahan and Boos (1992)は、同時密度関数以外のものを代替的な尤度として用いるための条件として、彼らが validity と呼ぶ性質を事後分布が満たすことを挙げている。経験尤度から得られる事後分布がこの条件を満たすならば、有限標本における妥当性が示される。しかしながら、彼らの条件を満たすことを解析的に示すのは容易ではなく、また、あらゆるケースで条件が満たされるとは考えにくい。そのため、Lazer (2003, Biometrika)と同様に、シミュレーションによって確認を行った。その結果、いくつかのシミュレーションデザインの下では、validity とは矛盾しない結果が得られた。

Schennach (2005) は、点識別可能なモーメント制約モデルにおいて、経験尤度をそのまま尤度として使うのではなく、ETEL を用いることを提案している。ETEL の優れた点は、ETEL から得られる事後分布は、ある種の尤度と事前分布にベイズルールを適用して得られる事後分布の極限としての解釈が可能である点にある。本研究では、ETEL をモーメント不等式モデルに対して拡張し、点識別されるケースと同様のベイズとしての解釈が可能であることを明らかにした。

(2) Severini and Wong (1992) は、セミパラメトリックモデルと真の分布の間の Kullback-Leibler ダイバージェンスを最小にするように局外母数を消去 (partial out) することで、セミパラメトリックモデルの least favorable モデルが求められることを示している。条件付パラメトリックモデルの場合、局外母数の次元は有限次元であるため、最小化問題を解くことは比較的容易である。それに対し、条件付モーメント制約モデルの局外母数は無限次元であるため、そのままでは無限次元の最小化問題を解く必要がある。しかしながら、この最小化問題には有限次元

の双対問題が存在することが知られており、これを解くことで、条件付モーメント制約モデルの least favorable モデルが求められる。

Least favorable モデルが求められれば、そのフィッシャー情報量を求めることで、セミパラメトリックモデルの効率性の限界が導かれる。条件付モーメント制約モデルの効率性の限界は、Chamberlain (1987, J. of Econometrics)で求められているが、本研究で示した導出方法はより簡便で、かつ、直感的に理解しやすいものになっている。

さらに本研究では、漸近的に効率的な推定量も提案している。Least favorable モデルを通じて効率性の限界を導出する利点として、漸近的に効率的な推定量が自然と示唆されることがある。Least favorable モデルは局外母数を含むが、これを推定すれば、尤度のようにして興味のあるパラメータの推定に用いることができる。この推定された尤度は、条件付モーメント制約モデルにおける経験尤度であると解釈される。また本研究で提案された推定量は、Kitamura, Tripathi, and Ahn (2004, Econometrica)によって提案された平滑化 (smoothed) 経験尤度推定量とも密接な関係を持ち、頻度論における経験尤度の研究分野に新たな知見をもたらすものである。

研究成果(2)の内容は論文としてまとめられ、Economics Letters 誌に掲載されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

Sueishi, N., A Simple Derivation of the Efficiency Bound for Conditional Moment Restriction Models, *Economics Letters*, 査読有, 138, 2016, pp.57-59
DOI: 10.1016/j.econlet.2015.11.028
<http://www.lib.kobe-u.ac.jp/repository/81009115.pdf>

末石 直也, サンプルセレクションとセルフセレクション, 日本労働研究雑誌, 査読無, No.657, 2015, pp16-17

[学会発表](計5件)

末石 直也, A simple way of deriving the efficiency bound for moment restriction models, Summer Workshop on Economic Theory, 2015.8.6, 小樽商科大学(北海道)

末石 直也, A New Interpretation of Empirical Likelihood for Time Series Models and Its Application to Model Selection Testing, SSK International Workshop in Kyoto, 2014.2.18, ウェスティ

ン都ホテル京都（京都府）

末石 直也、A New Interpretation of Empirical Likelihood for Time Series Models and Its Application to Model Selection Testing、統計関連学会連合大会、2013.9.11、大阪大学（大阪府）

末石 直也、A New Interpretation of Empirical Likelihood for Time Series Models and Its Application to Model Selection Testing、高次元データに関連する統計理論の新展開とその応用、2013.9.5、小樽商科大学（北海道）

末石 直也、A New Interpretation of Empirical Likelihood for Time Series Models and Its Application to Model Selection Testing、Summer Workshop on Economic Theory、2013.8.8、小樽商科大学（北海道）

〔図書〕(計1件)

末石 直也、日本評論社、計量経済学 - ミクロデータ分析へのいざない、2015、210

〔その他〕

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/naoyasueishij/research>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

末石 直也（SUEISHI, Naoya）

神戸大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号：40596251

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：