

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800001

研究課題名(和文) 導来代数幾何と双対理論

研究課題名(英文) Derived geometry and duality

研究代表者

岩成 勇 (Iwanari, Isamu)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：70532547

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は古典的淡中圏の理論を高次圏へ拡張し応用をすることを目標としたものであった。安定圏に対してfine淡中圏という概念を導入し、淡中的特徴づけを与えた。更にこの理論を混合モチーフの安定圏に応用することに成功し、ある種の有限性をもつChowモチーフで生成された混合モチーフの圏に対して任意の予想を仮定せずに淡中双対にあたる導来スタックとモチビクガロア群を構成した。これとガロア表現の結果を組み合わせて、ある場合にはモチビクガロア群の構造を明らかにした。モチーフ的有理ホモトピー型という概念を導入しモチビクガロア群の高次ホモトピー群や冪単基本群への作用など構成した。

研究成果の概要(英文)：The principal purpose of this program is to study a duality of tannakian type for higher categories and to apply it to various theory such as mixed motives. I proved a tannakian characterization theorem for symmetric monoidal stable infinity-categories that satisfy a certain simple condition (so-called fine tannakian infinity-categories). I applied this theory to mixed motives to obtain motivic Galois stacks and associated motivic Galois group. I also define a motivic rational homotopy type and its relation with motivic Galois actions and related notions. I applied the tannaka duality theory to motivic rational homotopy types.

研究分野：代数幾何学

キーワード：淡中双対 高次圏 モチーフ DG代数 変形理論

1. 研究開始当初の背景

報告書を書いている時分ではなく、2012年、2013年初頭当時における研究の背景から説明する。淡中双対とは、一つの見方ではポントリャーギン双対性の非可換への拡張とみなせ、代数群 G は、 G のすべての有限次元表現のなす対称モノイダル (テンソル) 圏から復元できることを主張する (Tannaka, Krein, Saavedra, Deligne,...)。別の見方としては、これは古典的なガロア理論 (SGA 1 において展開される Galois 圏の理論) の線型版とも言える。これを大雑把に Galois・淡中双対性あるいは単に双対理論ということにする。また以下「導来」と「高次」を濫用する。極めて大局的に言って代数幾何や現代的な幾何学では、(興味ある数学的对象) \Rightarrow (圏) \Rightarrow (不変量) \Rightarrow (元の数学的对象への応用) という流れが1つの中心にある。例えば、先ほどの双対理論の中の例で言えば、スキームからエタール被覆のなす圏を考え Galois 圏の理論をつかってエタール基本群を構成したことは代数幾何・数論幾何では基本的な手法となり遠アーベル幾何などの深い理論につながっている。他の重要例としては、スキームから、その上のベクトル束のなす圏を考え、Quillen の方法 (Q-構成) によって高次 K 群を構成したことは、代数幾何・数論等に革新的な成功をもたらしたことが思い出される。

一方で、最近では従来の普通の圏論では収まりきらないような重要な高次の圏が構成され始めている。ホモロジー的ミラー対称性に現れるスキーム上の複体のなす DG 圏やラグランジュ部分多様体の深谷圏などや、混合モチーフの高次圏などである。これらの例では、従来の圏論では扱えないような高次のホモトピー (Massey 積などに関係する) が本質的に現れる。今後益々このような高次の圏が重要な対象として現れ、基本的対象になると思われる。従って上記の図式の「圏」のところを「高次の圏」に拡張することが重要になっていた。

2. 研究の目的

Galois・淡中理論を高次圏論的枠組みで昇華させた「導来 Galois・淡中双対性理論」あるいは「高次 Galois・淡中双対性理論」に拡張し応用することを目指していた。特に、後述するようなモチーフなどの応用先を考察しながらそれに見合う形を考慮しながら理論を構築し応用を目指す。ここで目標の「導来淡中双対性理論」は単なるアブストラクトナンセンスではなくこのような理論を目標とする動機になるような例が様々な分野にある。例えば、私は福山浩司氏 (現洛星高校教員) との共著論文において淡中双対の考え方を高次圏的な枠組みのなかで考えることによって、スキームや Deligne-Mumford スタックの導来圏においても淡中双対性の導来類似が成り立つことを示した。これはある意味スキームやスタック

クにおける「導来淡中双対性」「高次淡中双対性」と思え、高次の (安定な) テンソル圏とスキームや (高次) スタックなどといった幾何の双対性を表していると言える。また、新しい高次の淡中双対理論を目指す大きな動機を与えるのは混合モチーフに対するモチーフ的ガロア理論への応用である。我々の目標はこれらの例を含む高次の Galois・淡中理論を構成し新たな応用に取り組むものである。

3. 研究の方法

2012年当時までの私 (当該研究者) の研究では、弱い形の淡中理論は構成されていた。しかしながら、高次の淡中圏といえるものは得られていなかった。大きな問題は混合モチーフの安定圏への応用を視座に入れたとき、その圏にはよい t 構造の存在が保証されていないことであつた。 t 構造が存在する状況であるならば、古典的な理論における手法の援用によって比較的容易に、 t 構造付き高次圏における淡中圏の概念と双対型理論が作れるのである。(そういう内容のプレプリントも書いたのであるがつまらないのでボツにした。実際同様の内容で博士論文を書いた人も出てきた。) しかしそれでは応用が無くつまらない拡張になってしまう。問題点は、高次安定圏では旧来のアーベル圏では起きないようなある本質的困難に起因しているのである。それを乗り越える本質的に新しい技術を見つけ、よい拡張をめざすことが結句集中すべき方法であるといえる。

4. 研究成果

研究の方法に記した困難を乗り越える手法を見つけることが出来た。一般線形群の表現論からヒントを得た Wedge-finite 対象と私が呼んでいる概念が重要であることを見いだした。一般線形群の表現の導来圏を圏論的に特徴付ける技術により、安定圏に対して fine 淡中圏という概念を導入した。それに対して淡中的特徴づけを与えた。この淡中型理論はモチーフにも有理ホモトピー論にも適用できる。この理論を混合モチーフの安定圏に応用し、そこから木村有限といわれるある種の有限性をもつモチーフから生成した混合モチーフの圏に対して (任意の予想を仮定せずに!) 淡中双対にあたる導来スタックとそのループ空間であるところのモチビクガロア群を構成した。これは Spietzweck の混合テートモチーフの場合の淡中型定理の大きな拡張になっている。これとガロア表現の結果等を組み合わせると、ある場合にはモチビクガロア群の構造を明らかにした。有理ホモトピー論の淡中的解釈もおこなった。さらにモチーフ的有理ホモトピー型をいう概念を導入し、そこにおいても様々な形でこの高次の淡中理論を有用に用いた。例えば、モチビクガロア群の高次ホモトピー群や冪単基本群への作用など構成した。なお、当該研究期間にこ

のテーマから若干それるのであるが非可換代数幾何における局所周期写像の構成や応用の研究も行った。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Isamu Iwanari, Tannakization in derived algebraic geometry, Journal of K-Theory Vol. 14 (2014), pp.642-700. (査読有)

Isamu Iwanari, Bar construction and tannakization, Publication of Research Institute for Mathematical Science, Vol. 50, (2014) pp. 515-568. (査読有)

Hiroshi Fukuyama and Isamu Iwanari, Monoidal infinity category of complexes from tannakian viewpoint, Mathematische Annalen, (2013) Vol. 356 pp. 519-553. (査読有)

[学会発表](計 17 件)

岩成 勇 "Tannaka duality, stable infinity-categories and motivic Galois groups" Seminaires Analysis Algebriques, Institute de Mathematique de Jussieu, 2016年11月21日 パリ(フランス)

岩成 勇 "Period mapping for noncommutative algebras" Seminaires de Geometrie Algebrique, Champs et Homotopie, Institute de Mathematiques de Toulouse, 2016年10月25日 トゥールーズ(フランス)

岩成 勇 "Tannaka duality, stable infinity-categories and motivic Galois groups" Seminaire de Geometrie Algebriques, Champs et Homotopies, Institute de Mathematiques de Toulouse, 2016年10月18日 トゥールーズ(フランス)

岩成 勇 "Period mapping for noncommutative algebras I, II, III", 「非可換代数多様体に対するホッジ理論と周期写像」大阪大学 2016年8月1日から3日 大阪市

岩成 勇 "Reconstructing schemes and Deligne-Mumford stacks from derived infinity-categories" algebra seminar, Fudan university, 2015年11月6日.

上海(中国)

岩成 勇 "Derived algebraic geometry and Tannaka duality" Colloquium, Fudan university, 2015年11月5日 上海(中国)

岩成 勇 "From Bousfield localizations to dualities of tannakian type", 研究集会 Bousfield localizations form a set: a workshop in memory of Tetsusuke Ohkawa, 2015年8月30日 名古屋大学多元数理 名古屋市

岩成 勇 「圏と応用についての連続講義」, 第3回代数トポロジー信州・春の学校 2015年3月3日-6日 信州大学理学部 松本市

岩成 勇 "導来淡中双対性とモチーフのガロア群" 名古屋大学代数幾何学セミナー 2015年1月19日 名古屋大学多元数理 名古屋市

岩成 勇 "Derived Tannaka duality and motivic Galois groups" International workshop on motives in Tokyo 2014 12月16日 東京大学数理 東京

岩成 勇 "導来淡中双対性について" 日本数学会 2014年秋季総合分科会 代数学分科会特別講演 広島大学 2014年9月28日 東広島市

岩成 勇 "Tannaka duality in derived algebraic geometry and applications" Homological methods in algebra, geometry, and physics, City university London, 2014年7月26日 ロンドン(イギリス)

岩成 勇 "Kimura finiteness and derived Tannaka duality theorems", 函館数論幾何研究集会, 北海道教育大学, 2014年5月26日 函館市

岩成 勇 "Categorified ring theory", Workshop on noncommutative motives and derived algebraic geometry, 中央大学, 2014年2月25日 東京

岩成勇 ``アーベル多様体の混合モチーフのモチーフ的ガロア群'' 代数幾何学セミナー 東北大学 2013月11月22日 仙台市

岩成勇 ``アーベル多様体の混合モチーフのモチーフ的ガロア群'' 整数論・保型形式セミナー 大阪大学 2013月11月15日 大阪市

岩成勇 `楕円曲線の混合モチーフのモチーフ的ガロア群", K-theory, モチーフセミナー, 中央大学, 2013年6月10日 東京

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩成 勇 (IWANARI, Isamu)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：70532547