

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 1 日現在

機関番号：11501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800002

研究課題名(和文)ガロア点を用いた射影多様体の分類理論と新展開

研究課題名(英文)Classification theory of projective varieties by Galois points and new developments

研究代表者

深澤 知 (FUKASAWA, SATORU)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：20569496

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：(1)平面曲線の内ガロア点がある有限個のときgeneric order of contactと幾何種数、次数を用いた上限を与えた。(2)外ガロア点を2つもつ平面曲線の族を構成し、ガロア点の個数を決定した。(3)標数零、4次の有理平面曲線について、内ガロア点を2つもつものを特徴づけた。(4)「ガロア点と有理点一致するのはいつか？」という問題を提起し、幾何種数が1以下のときに特徴づけを与えた。(5)ガロア点を2つもつ非特異平面曲線の自己同型群を決定した。(6)拡張可能ガロア点に対応する双対曲線の点のガロア閉包を考察した(三浦氏との共同研究)。(7)準ガロア点を導入した(高橋氏、三浦氏との共同研究)。

研究成果の概要(英文)：(1) I presented an upper bound for the number of inner Galois points for any plane curve in terms of the generic order of contact, the geometric genus and the degree, if the number is finite. (2) I presented a family of plane curves with two outer Galois points, and described the number of Galois points. (3) I characterized rational curves of degree four with two Galois points in characteristic zero. (4) I proposed the problem "When do Galois points coincide with rational points?" and I gave a characterization if the geometric genus is at most one. (5) I described the automorphism groups of smooth plane curves with two Galois points. (6) We studied the Galois closure for the dual curve and the point corresponding to an extendable Galois point (joint work with K. Miura). (7) We introduced the notion of the "quasi-Galois point" (joint work with T. Takahashi and K. Miura).

研究分野：代数幾何

キーワード：ガロア点 ガロワ点 正標数 射影代数多様体 射影 ガロア群 ガウス写像 準ガロア点

### 1. 研究開始当初の背景

1996年、吉原久夫氏(新潟大学)は代数幾何学においてガロア点という新たな概念を導入した:射影平面内の平面曲線Cに対し、平面内の点Pからの射影により誘導される関数体の拡大がガロア拡大であるとき、PをCのガロア点という。吉原氏はガロア点がどのような点か説明する際つぎのようにいう:「空間に浮かぶ立方体を想像してください。一般の位置に視点を置いてその立体を眺めると何ら対称性は見えませんが、正方形や正六角形など対称性の高い図形が見える特殊な点があります。ガロア点とはそのような点です。」さらに注釈を加えれば、このような対称性が見える点の分布は立方体を特徴づけているとも言える。ガロア点の研究はこのような古典的な観点とリンクしており、逆にその観点を代数幾何学に持ち込んでいるとも考えられる。

吉原氏は標数零の非特異平面曲線に対してガロア点の分布を完全に決定した。これによりガロア点研究の基本的方法・ガロア点を用いた分類理論の基盤が確立したといえる。その後ガロア点の概念は、超曲面のガロア点、ガロア部分空間、ガロア埋め込み・・・等、吉原氏自身によって拡張され、発展を遂げた。また、三浦敬氏(宇部高専)は特異曲線へ、高橋剛氏(新潟大学)は特異曲面へ研究を広げた。

正標数においてガロア点分布の研究結果が出始めるのは2006年頃である。本間正明氏(神奈川大学)は $q$ 元体上定義されたHermitian曲線について、ガロア点の集合と射影平面の $q \times q$ 元体有理点の集合とが一致することを示した。その後2011年頃までの著者の研究により、正標数の非特異平面曲線に対するガロア点の分布が完全に決定された。一方、著者は「ガロア点を無限個もつ」平面曲線を長谷川武博氏(滋賀大学)との共同研究において発見し、この性質をもつ平面曲線を完全に分類した。特にこの種の例は正標数にしか存在しないことがわかり、正標数の視点から全く新しい現象を発見・提供した。さらに著者は、Ballico-Hefez曲線と呼ばれる有理曲線について、ガロア点の配置と有理点の配置が全く一致することを示した。続いて本間氏、Seon Jeong Kim氏(慶尚大、韓国)と共同研究を進め、この曲線上の有理点を用いたある代数幾何符号の最小距離を決定し、Griesmer限界に到達することを示した。

ガロア点研究における重要な成果のひとつは「ガロア点の分布によって射影多様体を分類する」という種類の結果がいくつも得られていることである。例えば吉原氏により、標数零で外ガロア点を最大にもつ非特異超曲面は、Fermat超曲面であることが証明されている。また上述のように、ガロア点を無限個もつ平面曲線は完全決定される。このように2013年頃には「ガロア点を用いた分類理論が展開されている」と言える程度に結果が

生まれていた。一方、従来のガロア点の研究はガロア点自身或いは関数体の部分体の理論との関係のもと成されるものが主流であったが、上述したように、有理点・符号理論などの別の分野との関係を視野にいった研究が成され始めていた。それが2013年ころの状況であった。

### 2. 研究の目的

以上の背景を踏まえて本研究においては、ガロア点を用いた射影多様体の分類理論を推進し、他分野との関係のなかからガロア点研究の新たな発展を創出することを目標とした。特に、「ガロア点・ガロア部分空間の分布」という観点から様々な射影多様体を分類すること、及びガロア点と有理点・符号理論との関係をより深く見出すこと、を本研究の目的とした。

### 3. 研究の方法

平面曲線のガロア点については、Hurwitzの分岐公式、変曲点の個数の公式とガロア被覆の基本性質を用いた。正標数においてはこれらの扱いはより複雑になる。例えばHurwitzの公式についてはdifferentの概念が、変曲点公式についてはStohr-Volochの理論が必要となる。正標数特有の現象に細心の注意を払いながらこれらの手法を用いた。

本研究課題の中心的問題である「ガロア点の個数の上限」に関して下記の(1)の成果を得たが、それには、1980年代後半から1990年代前半にかけて整備された正標数ガウス写像及び射影双対性の理論における手法が有効に働いた。より詳しくは、正標数ガウス写像に関する楯の定理(はめ込み曲線であれば、ガウス写像はほとんどの点で単射である)、Hefezや本間による非再帰的曲線(双対写像が非分離的な曲線)の分類結果である。

### 4. 研究成果

ガロア点が曲線上にあるとき、内ガロア点といい、外にあるときは外ガロア点という。また、ガロア点による自己同型がすべて射影変換に伸びるとき、拡張可能ガロア点と呼ぶことにする。さらに前述のように、「ガロア点が無限個のとき」は状況が完全に確定しているので、これを(FH)と呼ぶ。

(1) (FH)を除く平面曲線上のガロア点の個数について、generic order of contact  $M(C)$  (一般点での接線との重複度)と(非特異モデル)の種数  $g$ 、次数  $d$  を用いた上限

$$(M(C)+1)(2g-2)+3d$$

を与えた。さらに、上限に到達するときは「Hermitian曲線またはBallico-Hefez曲線(の射影同値類)」に限定されることを示した。内ガロア点を複数もつ例は当時6種類知られていたがそのうち個数の多い3種((FH)、Hermitian、Ballico-Hefez)について、ガロア点による特徴づけが与えられたことにな

る。そしてこれらの例の成功理由に対する理論的な説明を与えている。

(2) 標数  $p$  が正であるとき、外ガロア点を 2 つ (以上) もつ平面曲線のファミリーを構成し、いくつかの状況で外ガロア点の個数を決定した。  $q$  を  $p$  べきとする。これら曲線の次数が  $2q$  であるときには、個数が  $q - 1$  または  $q + 1$  となる曲線のファミリーが得られる。これは「次数を大きくすれば外ガロア点の個数がいくらかでも大きくなる」という例であり、この種の例としては Hermitian 曲線、Ballico-Hefez 曲線に次ぐ第 3 の例である。(雑誌論文(1))

(3) 標数零、次数 4 の有理的平面曲線について、2 個以上の内ガロア点をもつための必要十分条件として、曲線のパラメータを決定した。さらに計算機 (Mathematica) を用いることにより、内ガロア点を 3 点もつ有理曲線の存在を示した。次数 4 の平面曲線の個数については、三浦氏によりその上限が与えられていた。特に曲線が有理的であるときには、上限は「3」であることがわかっていた。今回の著者の結果により、この三浦氏の上限がシャープであることが示された。

この研究により、1 種の一般化を含め、内ガロア点を複数もつ平面曲線の例は 6 種類から 7 種類となった。

(4) 有理点とガロア点の関係を考察した。有限体上定義された代数曲線についてガロア点を有限体の代数閉包上で考える。体を適当に有限次拡大すればガロア点はその拡大体 (である有限体) の有理点となる。従って「ガロア点と有理点の集合が一致するのはいつか?」ということが問題となる。これを満たす例については、Hermitian 曲線、Klein 曲線、Ballico-Hefez 曲線の 3 つが知られている。「これらに限定されるか?」という問題を提起し、(非特異モデル) 種数が 1 以下で曲線上に有理点の存在を認めるとき、Ballico-Hefez 曲線として特徴づけられることを示した。(雑誌論文(2))

(5) ガロア点を複数もつ非特異平面曲線の分類リストに現れる曲線のうち、自己同型群が調べられていないと思われる 2 種の曲線について、その自己同型群を完全に決定した。そのうちの一種の群の位数は、標数零で成り立つ Hurwitz の上限を上回る。正標数でこの上限を上回る例は色々知られているが、その中で「ordinary」曲線と呼ばれるものは具体例があまり多くないと思われる。Deuring-Shafarevich の公式を用いて、この曲線が ordinary であることも証明できた。(雑誌論文(6))

(6) 標数は零とする。2012 年度までの研究によって「拡張可能ガロア点  $P$  のガロア群は、

双対曲線のとある対応する点  $P'$  での射影と可換になる群への埋め込みをもつ」という結果が得られていた。今回は「対応する点  $P'$  のガロア閉包」を考察した。点  $P'$  射影と元の点  $P$  の射影との関係を具体的に記述することに成功した。その記述を用い、「 $P'$  がガロア点となる状況」の決定と、ガロア閉包の拡大次数の上限を与えることができた。後者において特別な場合には群構造を特定した。さらに応用として、3 次平面曲線の双対曲線について、2 面体群や位数 18 の群を与える点の配置を明らかにした。(雑誌論文(3))

(7) 三浦氏・高橋氏と共同研究を行い、ガロア点の一般化として「準ガロア点」を導入し、その一般理論を整理した。準ガロア点とは、点射影と可換になる自己同型群  $G[P]$  の位数が 2 以上であるときに、その射影の中心点のことと定義した。標数零の非特異平面曲線を中心に、準ガロア点の定義方程式、準ガロア点の個数の上限、準ガロア点に付随する群が生成する群の構造、等を論じた。特に、4 次曲線について準ガロア点の個数の上限は「2」であり、これに到達するものは Klein 曲線に限定されることを示した。現在、プレプリントサーバ arXiv にそれらの結果を掲載 (arXiv:1505.00148) しており、得られた定理は 13 個に及ぶ。

背景に述べた吉原氏によるガロア点概念の一般化は、多様体や射影の中心の「次元の一般化」によるものである。著者らの一般化は「(射影と可換な)自己同型群の位数」に関するものであり、次元とは独立している。従って吉原氏の一般化と組み合わせた、準ガロア部分空間、準ガロア埋め込み等の概念が導入可能である。

他方、著者と高橋氏、三浦氏が世話人となり、「Workshop on Galois point and related topics」を 2013 年に山形大学、2014 年に滋賀大学 (長谷川氏の協力の下)、2015 年に神奈川大学 (本間氏の協力の下) にて開催した。この開催に際し、本研究課題への補助を利用して頂いた。ガロア点を中心に活発な議論が行われた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 7 件)

- (1) Satoru Fukasawa, A family of plane curves with two or more Galois points in positive characteristic, Contemporary Developments in Finite Fields and Applications (Fq12 Conference 報告集), 掲載確定済み, 査読有.
- (2) Satoru Fukasawa, Rational points and Galois points for a plane curve over a

- finite field, Finite Fields and Their Applications, 39 (2016), 36-42, 査読有. DOI: 10.1016/j.ffa.2016.01.003
- (3) Satoru Fukasawa and Kei Miura, Galois points for a plane curve and its dual curve, II, Journal of Pure and Applied Algebra, 220 (2016), 2038-2048, 査読有. DOI: 10.1016/j.jpaa.2015.10.015
- (4) Satoru Fukasawa, An upper bound for the number of Galois points for a plane curve, Contemporary Mathematics, 632 (2015), 111-119, 査読有. DOI: 10.1090/conm/632/12623
- (5) Satoru Fukasawa and Kei Miura, Galois points for a plane curve and its dual curve, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 132 (2014), 61-74, 査読有. DOI: 10.4171/RSMUP/132-5
- (6) Satoru Fukasawa, Automorphism groups of smooth plane curves with many Galois points, Nihonkai Mathematical Journal, 25 (2014), 69-75, 査読有.
- (7) Satoru Fukasawa, Galois points for a plane curve in characteristic two, Journal of Pure and Applied Algebra, 218 (2014), 343-353, 査読有. DOI: 10.1016/j.jpaa.2013.06.006

〔学会発表〕(計 10 件)

- (1) 深澤知, 有限体上の平面曲線に対する有理点とガロア点, Workshop on Galois point and related topics, 2015 年 9 月 6 日, 神奈川大学横浜キャンパス
- (2) 深澤知, 平面曲線のガロア点配置と応用, 第 60 回代数学シンポジウム, 2015 年 9 月 1 日, 静岡大学静岡キャンパス
- (3) Satoru Fukasawa, Rational points and Galois points for a plane curve over a finite field, The 12th International Conference on Finite Fields and Their Applications, 2015 年 7 月 16 日, Skidmore College, Saratoga Springs, USA
- (4) 深澤知, Ballico-Hefez 曲線上のガロア点, 有理点, 符号, 九州大学組合せ数学セミナー, 2014 年 10 月 18 日, 九州工業大学サテライト福岡天神
- (5) 深澤知, 平面曲線上のガロア点の個数の上限, Workshop on Galois point and related topics, 2014 年 9 月 13 日, 滋賀大学大津サテライトプラザ
- (6) Satoru Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Workshop around algebraic combinatorics, 2014 年 1 月 25 日, 高知大学理学部
- (7) 深澤知, 正標数におけるガロア点, 代数幾何小研究集会 新潟, 2013 年 12 月 1 日, 新潟大学駅南キャンパスときめいと

- (8) Satoru Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Birational Geometry and Singularities in Positive Characteristic, 2013 年 11 月 7 日, 東京大学数理科学研究科
- (9) 深澤知, Galois points for a plane curve and its dual curve (joint work with K. Miura), Workshop on Galois point and related topics, 2013 年 9 月 14 日, 山形大学理学部
- (10) Satoru Fukasawa, Rational points and Galois points for a plane curve, The 11th International Conference on Finite Fields and Their Applications, 2013 年 7 月 25 日, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Germany

〔その他〕

ホームページ等

正標数の視点からの射影代数幾何学の研究  
<http://www-sci.yamagata-u.ac.jp/wp-content/uploads/2014/12/fukasawa.pdf>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

深澤 知 (FUKASAWA SATORU)  
 山形大学・理学部・准教授  
 研究者番号: 20569496

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし