1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８００００３

研究課題名（和文）頂点作用素代数のモジュラー不変性とその表現論への応用に関する研究

研究課題名（英文）Modular invariance of vertex operator algebras and its application to representation theory

研究代表者

有家　雄介（ARIKE, Yusuke）

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：５０５８３７７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，頂点作用素代数の既約表現のみたすモジュラー微分方程式と，頂点作用素代数の関係について考察を進めることで以下の成果を得た．（１）アフィン頂点作用素代数の既約指標の空間が５次元以下２次元以上の場合には，常にあるモジュラー微分方程式の解空間となることを示した．（２）モジュラー微分方程式を用いてヴィラソロ頂点作用素代数を特徴づけた．（３）３階のモジュラー微分方程式の解析により存在が予想されていた頂点作用素代数が存在しないことを証明した．

研究成果の概要（英文）：We study several relations between characters of simple modules of vertex operator algebras and modular linear differential equations and obtain the following results. (i) We prove that if the dimension of characters of simple affine vertex operator algebras is less than 6 and greater than 1, then the space of characters is a solution space of a modular linear differential equation. (ii) We give a characterization of Virasoro vertex operator algebras by means of modular linear differential equations. (iii) We show that there are no good vertex operator algebras with central charges 164/5 and 236/7 whose characters are solutions of modular linear differential equations of order 3.

研究分野：頂点作用素代数

キーワード：頂点作用素代数　モジュラー不変性　モジュラー微分方程式　ヴィラソロ代数　大域次元

１．研究開始当初の背景
頂点作用素代数は，理論物理学における共形場理論の数学的な対応物であって，数理物理学だけではなく，有限群論，モジュラー形式，テンソル圏，リー理論などの様々な数学的な対象と関係している．

頂点作用素代数とモジュラー形式との関係として，指標のモジュラー不変性が挙げられる．

この性質は，頂点作用素代数が C_2 有限性および有理性条件を満たす場合に，既約表現のトレース関数が(モジュラー変換で不変な空間である)種数 1 の共形ブロックの空間の基底となることから従う．この性質の際には，トレース関数すべてがモジュラー微分方程式と呼ばれる特別なタイプの微分方程式の解となることが重要な役割を果たす．特に，既約表現の指標はトレース関数に真空元を代入して得られるので，頂点作用素代数の既約表現の指標の生成する空間はあるモジュラー微分方程式の解空間の一部となっている．

このモジュラー微分方程式を用いて頂点作用素代数の分類を行う，という研究が行われているが，これは 20 年以上前に 2 階の微分方程式においてのみ行われていた．そこで，より高い階数の微分方程式に対応する頂点作用素代数を分類する問題が自然に考えられる．

頂点作用素代数の表現のテンソル積(フュージョン積)は種数 0 の共形ブロックの空間を用いて定義される．この理論は，特に表現の圏が半単純の場合には確立されており，トレース関数のモジュラー不変性を用いて，フュージョン積の分解則を決定する Verlinde の公式やテンソル圏やその対象の不変量である，大域次元や量子次元の理論も近年良く調べられている．

２．研究の目的
本研究では，頂点作用素代数の持つ性質として最も特徴的である，指標のモジュラー不変性と表現の圏が(モジュラー)テンソル圏となる，という二つの性質を，捩れ加群やスーパー代数の場合に対して拡張することを目的とする．また，モジュラー不変性において重要な役割を果たすモジュラー微分方程式と頂点作用素代数の関係についても考察を加える．具体的な目標は以下の通りである．

(1)頂点作用素(超)代数の自己同型による捩れをもつ加群に対する種数 0 および 1 の共形ブロックの空間を交絡作用素や擬跡関数を用いて記述すること．

(2)頂点作用素超代数の捩れ加群に対するフュージョン積の理論を確立すること．

(3)モジュラー微分方程式に対応する頂点作用素代数を分類すること．

３．研究の方法
上記の各研究目的を達成するための方法を述べる．

(1) 研究代表者によりこれまでに得られた結合代数の自己同型に付随する線形関数を用いて，擬跡関数の概念を捻れ加群上に定義し，これが種数１の共形ブロックの空間の元となることを証明する．さらに，ここで定義した擬跡関数が種数１の共形ブロックの基底となることを示す．

(2) 頂点作用素超代数とその捩れ加群の間に定義される交絡作用素と，種数 0 の共形ブロックの空間の関係を確立する．さらに，頂点作用素超代数がよい条件を満たしている場合に，2 つの表現のフュージョン積が存在することを証明する．

(3) 頂点作用素代数の既約表現の指標の空間が 3 または 4 階のモジュラー微分方程式の解空間の部分空間となることを仮定して，そのような頂点作用素代数の中心電荷の候補を決定する．さらに，各中心電荷に対して得られる微分方程式を解くことで，指標の候補をリストアップし，対応する頂点作用素代数を決定する．

４．研究成果
主要な研究成果は以下の通りである．

(1) アフィン頂点作用素代数の既約表現の指標の空間がいつモジュラー微分方程式の解空間と一致するかについて考察し，指標の生成する空間の次元が 2 以上 5 以下ならば，この空間は必ずモジュラー微分方程式の解空間と一致することを証明した．さらに，一部の型とレベルのアフィン頂点作用素代数に関しては，その指標の空間の次元を元の単純リー代数のランクのみに依存する形で導き，その結果，レベルが１の場合には E_8 型の場合をのぞいて，指標の生成する空間がモジュラー微分方程式の解空間と一致することを証明した．また，指標の生成する空間が 20 次元までのアフィン頂点作用素代数について，その指標の空間がモジュラー微分方程式の解空間と一致しているかどうかについて調べた．この結果は論文として Letters in Mathematical Physics に掲載済みである．また，この成果を，東華大学(台湾)での国際研

究集会で発表した.

(2) 既約表現の指標の生成する空間が 3 または 4 階のモジュラー微分方程式の解空間に含まれる，という条件をみたす頂点作用素代数の分類を行い，4 階の場合には完全な分類結果を得た．この場合には結果としてヴィラソロ頂点作用素代数と，その単純カレント拡大のみが現れる．ここで得られる結果を一般化し，ヴィラソロ頂点作用素代数およびその単純カレント拡大の既約表現の共形ウエイトがその頂点作用素代数自身を除いて整数にならないとき，(階数に関係なく)モジュラー微分方程式の形のみから頂点作用素代数が決まってしまうことを証明した．この成果は論文にまとめ，現在投稿中である．また，四川大学(中国)および京都大学の研究集会でこの成果を発表した.

3 階のモジュラー微分方程式に対応する場合には，頂点作用素代数の中心電荷の候補(11 個)と，その中心電荷に対応する場合に現れる微分方程式を決定することができたが，対応する頂点作用素代数が一意的かどうかについては，ヴィラソロ頂点作用素代数およびその単純カレント拡大になるもの(3 個)以外では証明できなかった．しかしながら，現れた微分方程式の解を完全に記述することに成功し，11 個の中心電荷のうち 9 個は，対応する頂点作用素代数が存在することがわかった．また，対応する頂点作用素代数が存在するかどうか不明な 2 つの場合には，対応するモジュラー微分方程式の解がヴィラソロ頂点作用素代数の既約表現の指標の多項式として表されることを証明した.

(3)上述のように，3 階のモジュラー微分方程式をみたすような頂点作用素代数の中心電荷の候補のうち，対応する頂点作用素代数が見つかっていないものが 2 つ存在した．これらはもし存在したとしても，C_2 有限かつ有理的な頂点作用素代数とはなり得ないことを証明した．証明では，(2)で得られたモジュラー微分方程式の解のヴィラソロ頂点作用素代数の指標を用いた表示を使って，解のモジュラー変換を計算した．この結果を用いて対応するモジュラーテンソル圏の不変量を二通りに計算することで，矛盾を導いた．さらに，他の研究グループにより数値的に確認されていた，楕円 j 関数をヴィラソロ頂点作用素代数の既約表現の指標の多項式で記述する公式を厳密に証明した．この成果は現在論文作成中である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）
1) Y.Arike, K.Nagatomo, Y.Sakai, Characterization of the simple Virasoro vertex operator algebras with 2 and 3-dimensional space of characters, Contemp. Math., (2017) In press, 査読有.

2) Y.Arike, M.Kaneko, K.Nagatomo, Y.Sakai, Affine vertex operator algebras and modular linear differential equations, Lett. Math. Phys., 106 (2016), 693-718, 査読有.

〔学会発表〕（計 9 件）
1) Y.Arike, Characters and modular linear differential equations of order 3 and 4, Workshop on Finite Groups, VOA, and algebraic combinatorics, March 21-25, 2016, Foguang University, Taiwan.

2) 有家雄介，永友清和，境優一，Vertex operator algebras, minimal models and modular linear differential equations of order 4，日本数学会 2016 年度年会，2016 年 3 月 16-19 日，筑波大学.

3) 有家雄介，金子昌信，永友清和，境優一，Affine vertex operator algebras and modular linear differential equations，日本数学会 2016 年度年会，2016 年 3 月 16-19 日，筑波大学.

4) Minimal models and modular linear differential equations of order 4，有限群とその表現，頂点作用素代数，代数的組合せ論の研究，2016 年 1 月 5-8 日，京都大学.

5) Y.Arike, Minimal models and modular linear differential equations of 4th order, Vertex Operator Algebra and Related Topics, Sep. 7-11, 2015, Sichuan University, China.

6) Y.Arike, Characters of affine VOAs and modular linear differential equations, Taitung Workshop on finite groups, VOA and algebraic combinatorics, March 7-10, 2015, National Taitung University, Taiwan.

7) Y.Arike, Modular invariance of vertex operator algebras, Around Mathematical Physics and Geometry, Sep. 20-21, 2014, 神戸大学.

8) Y.Arike, Fusion rules for irreducible modules for symplectic fermionic VOAs, Hualien Workshop on finite groups, VOA, algebraic combinatorics, and related topics, March 22, 2016, National Dong Hua University, Taiwan.

9) Y.Arike, Fusion products for symplectic

fermionic VOSA, Beyond the Moonshine, July 7, 2013, Sendai.

６．研究組織

(1)研究代表者

有家　雄介（ARIKE, Yusuke）
筑波大学・数理物質系・助教
研究者番号：50583770