様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８００００４

研究課題名（和文）数論的D加群とラングランズ対応の研究

研究課題名（英文）Arithmetic D-modules and Langlands correspondence

研究代表者
阿部　知行（Abe, Tomoyuki）

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・准教授

研究者番号：７０６０９２８９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：関数体上のp進係数理論に対するラングランズ型の対応を構築し，その帰結としてドリーニュの小同志予想を曲線上で解決した．これは，本研究課題の当初からの目標を達成したといえる．この対応の構築により有限体上のコホモロジー理論のp進的解釈が可能となり新しい側面を切り開いたといえる．
主定理は曲線上の過収束Fアイソクリスタルと尖点的保型表現の対応であるが，証明では過収束アイソクリスタルの圏では狭いため，数論的D加群と呼ばれるより広い圏で考える必要がある．本研究では数論的D加群の基礎的研究を完成させることによりラングランズ型の対応を得るに至った．

研究成果の概要（英文）：We constructed a Langlands type correspondence for p-adic coefficient theory for function fields, and as a result, I resolved Deligne's crystalline companion conjecture for curves. This was nothing but the goal of this research, and we may say that I attained it. This correspondence enables us an p-adic interpretation of cohomology theories over finite fields, and opened a new door of the theory.
The main result states that there exists a correspondence between overconvergent F-isocrystals and cuspidal automorphic representations. However, in the proof, the category of overconvergent isocrystals is too small, and we need to deal with a much wider class called the arithmetic D-modules. In the work, by completing the program of Berthelot on the construction of such theory, we were able to obtain the desired result.

研究分野：数論幾何学

キーワード：p進コホモロジー　関数体のラングランズ対応　数論的D加群

１．研究開始当初の背景

Weil は Riemann のゼータ関数を拡張し，整数環上有限型な多様体のゼータ関数を考察した．さらに，多様体が有限体 F_p 上にある場合のゼータ関数の性質を非常に深く考察し，Weil 予想と現在では呼ばれている一連の有名な予想を提起した．この予想は Grothendieck や Deligne を始めとした人の努力の末，完全に解決しており，20 世紀最大の数学的成果の一つとして捉えられる．

Weil の考察によると，Weil の予想はある種の良いコホモロジー論の存在から導かれることが分かっており，Grothendieck や Deligne の成果はその性質を満たすコホモロジー論の構築にあった．Grothendieck は有限体の標数とは違う素数 l を固定するごとに l 進コホモロジーと呼ばれるコホモロジー論を構築し，Weil 予想の大半を証明し，Deligne は l 進コホモロジーのさらに深い性質を証明することで残りの Weil 予想を解決した．ここで，l という素数は無数にあるので，それらの間の関係がどうなっているかという自然な疑問がわいてくる．この自然な問いに対する答えが Deligne の Weil 予想を解決した論文“La conjecture de Weil II”（以下 Weil II）に予想されており，それによるとある意味で全ての p 以外の l において同じような情報を持っているというものであった．この予想は極めて深いものでラングランズの哲学に立脚するものである．この Deligne の予想は階数が 2 の場合は Drinfeld，一般の場合は 21 世紀に入り Lafforgue によって関数体のラングランズ対応という形で解決された．その後も l 進コホモロジーの研究に於いてなくてはならない道具となっている．

一方で有限体の標数 p と同じ素数を取ったときの動向は謎が多く，重要な研究対象であった．Grothendieck を始めとした人々は l 進ではなく p 進のコホモロジーを l 進とは別の技術を使うことで定義しようと試み，実際固有かつ滑らかな多様体に対してクリスタリン・コホモロジーと呼ばれるコホモロジー論を構築した．これらのことから Weil II において p 進的挙動に関しても予想がされており，l 進コホモロジーと似た動きを示すと予想している．本研究課題の当初の目標は p 進係数理論に対してラングランズ対応を構築することによりこの予想を解決することにあった．Deligne が予想した当時は p 進コホモロジー論がまだ未熟だったため，予想はいささか曖昧な部分があったが，その後の p 進コホモロジー論の発展で様々な基礎的性質が証明され，Deligne の予想が近年の p 進コホモロジー論に於いて重要な問題になりつつあった．

２．研究の目的

研究の背景でも述べているとおり研究の目的は Deligne の p 進係数理論に対するラングランズ型の予想を解決することである．もう少し具体的に問題を述べたい．F_q を標数 p の有限体上として，X を F_p 上の滑らかな曲線とする．簡単のため幾何学的連結であるという仮定も入れておく．このとき Deligne は以下の二つの集合に X の各閉点でのフロベニウス固有値が一致する様な 1:1 対応が存在すると予想した：

・X 上の既約で滑らかな l 進層で行列式が有限なもの．

・X 上の既約で滑らかな過収束 F アイソクリスタルで行列式が有限なもの．

Deligne はさらに一般の正規な多様体に対しても同様の予想をしているが，曲線の場合と高次元多様体の場合では扱いが異なるので，本研究では曲線の場合に主に扱うものとする．

３．研究の方法

Deligne の予想の証明の方針として，過収束 F アイソクリスタルと尖点的保型形式の対応というラングランズ型の対応を構築することにより，Deligne 予想を解決するものである．上述の様に l 進層に関しては Deligne の予想は既に解かれており，これは l 進層と尖点的保型形式のラングランズ対応を構築することにより階数 2 の場合は Drinfeld が，一般の階数の場合は Lafforgue が示した．この Drinfeld と Lafforgue の方法を p 進コホモロジーに関しても適用しようというのが大まかな方法である．

まず，本研究課題が始まる以前の研究として，本研究代表者（阿部）と Marmora が共同で過収束 F アイソクリスタルのイプシロン因子の積公式を示していた．これは l 進理論においては l 進層から保型表現を構成するときに必要になってくるステップで，これを用いることにより，ラングランズ対応の構成が保型表現からアイソクリスタルを構成すれば十分であることが分かる．

アイソクリスタルなどの局所系を作る手段として一般的なのは相対的な多様体を構成してそのコホモロジーを取ることである．例えば今回の場合 X 上のアイソクリスタルを作りたいわけなので，f: Y-> X という射を作り，f_*K という相対コホモロジーを取れば X 上の対象が構成される．そのため，理想的には尖点的保型表現をとったとき上記の f の様な射を作りその押し出しが目標とする対象であることを示せば良い．実際の証明ではこのような簡明に物事が語れるわけではないが，Drinfeld はそのような多様体の候補として「シュトゥカ」というベクトル束の組からなるもののモジュライ空間を考えた．シュトゥカのモジュライ空間はスキームではなくアルティン・スタックと呼ばれる幾何学的対象になることが知られている．Lafforgue 箱のモジュライ空間のコホモロジーを精密に計算することによりラングランズ対応の l 進係数版を示した．今回の研究手法も基本的には Drinfeld と Lafforgue の方針と同じである．

実際，Weil 予想を用いることにより多様体が固有かつ滑らかだった場合はそのコホモロジーは同じフロベニウス固有値を持つことが知られており，このことからも同じ多様体を用いるのが適当であることが分かる．これらのことを総括すれば，多様体に対して p 進コホモロジー論の十分な基礎的性質が証明されていれば，シュトゥカのモジュライ空間のコホモロジーを用いることによって尖点的保型形式に対する欲しいアイソクリスタルが構成できる可能性があることが分かる．一方で Lafforgue の証明を鑑みると，単純にコホモロジーが取れれば良いわけではなく，コホモロジー論を含む様な「6 つの関手の枠組み」を構築することが必要となってくることが分かる．
本研究では Berthelot による数論的 D 加群を用いることにより 6 つの枠組みを完成させ，それを基本としてラングランズ対応を構成することを目指すものである．

４．研究成果
当初の目的通り p 進コホモロジーに対する 6 つの関手の枠組みをある種のアルティン・スタックで構成し，応用として過収束アイソクリスタルに対してラングランズ型の対応を構成した．
p 進コホモロジーに対する 6 つの枠組みの構成に関しては Berthelot が数論的 D 加群を提唱し，それに対する有限性の保存予想を提唱した 90 年前後に試みが始まった．当時は曲線の過収束アイソクリスタルのこともまだよく分からない状態だったので数論的 D 加群は複雑すぎ，10 年ほどはほとんど研究が進まない状況であった．数論的 D 加群の理論の始めの前進は Caro による過ホロノミック加群の導入だった．これは Berthelot の有限性予想が難しすぎるので，その性質を始めから満たす様な加群のみを扱おうという発想である．このアイディアから出発したときまず明らかでないのは過ホロノミック加群の圏が自明でないことである．Caro は非自明性を証明し，「良い」多様体に対して 6 つの関手の枠組みの多くを構成することに成功した．
次の前進は Kedlaya による志甫予想の解決にあるといえよう．志甫予想とは過収束 F アイソクリスタル E が多様体 X 上に与えられたとき，X の alteration Y が存在して，E の Y への引き戻しは対数的収束アイソクリスタルになっているという予想であり極めて強力な構造定理型の予想であった．Kedlaya はこの主張を最新の p 進微分方程式論を駆使し証明した．この定理の驚異的な部分は，コホモロジー理論の多くの主張が，構造の全く分からない一般的な過収束 F アイソクリスタルから境界での様子が鮮明に分かる対数的収束アイソクリスタルに帰着できることである．Caro と都築はこの定理を用いることによって過収束 F アイソクリスタルの数論的 D 加群としての実現が過ホロノミック加群になることを示した．これが分かると Caro を始めとする人々の数論的 D 加群の結果から「埋め込み可能なスキーム」に関して 6 つの関手の枠組みが構成できることが分かる．
本研究では大雑把に言ってこのような局所的な 6 つの関手の枠組みからアルティン・スタックでも適用できる 6 つの枠組みを構成するのが第 1 ステップである．6 つの関手の枠組みではスキームに対して三角圏を対応させるが，この三角圏は貼り合わせをすることが出来ず，技術的な問題は常にそこから派生する．これを回避するため Beilinson の同値の p 進コホモロジー類似を示す．これは埋め込み可能なスキーム X に関する三角圏を D(X) と書いたとすると，D(X) にある種の t 構造を入れることが出来，その核の導来圏と D(X) が同値であるという主張である．この定理で重要なことは導来圏の核自体はアーベル圏であり，貼り合わせが出来ることにある．そこで，一般的な埋め込み可能とは限らないスキーム X が与えられた場合，それを埋め込み可能なスキームで覆い，核の部分を貼り合わせることによって X の核に対応するアーベル圏を定義する．そしてその導来圏を取ることによって X の三角圏を構成するというものである．次に問題になってくるのは 6 つの関手の構成である．これも一筋縄には行かないがホモロジー代数的な手法を駆使することにより実現することが出来た．
次に実際にラングランズ対応を構成しなくてはならない．Lafforgue のラングランズ対応の構成では Deligne のフロベニウス跡に関する藤原により解決された予想を用いる．しかし，p 進の場合この予想の類似を示すことは再び骨の折れる結果なので，今回はこの部分を回避することにした．具体的には加藤-斎藤によるコホモロジー対応に関する跡の l 独立性の結果があるので，これを p 進コホモロジー論も含む様に拡張してやり，l 進の計算を流用するという手を用いるのである．その他様々な困難が存在するが，Lafforgue の方法の類似をたどることによりラングランズ型の対応，ひいては Deligne の p 進理論に対する予想の曲線の場合を解決するに至り，研究計画は成功だったといえる．
今後は一般次元の多様体の上での Deligne の予想を目標とすることになる．l 進層に関しては Drinfeld が Deligne の予想を一般次元の滑らかな多様体に対して解決した．当面はこの p 進類似を示したいが，アイソクリスタルが基本群の表現でかけるわけではないので困難が生じる．一方で曲線の場合の Deligne 予想の解決はいくつもの応用が生み出されつつある状況にあり，今後 p 進理論が本格的に用いられるきっかけになることを願っている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

① Abe, T.: Langlands program for p-adic coefficients and the petits camarades conjecture, to appear in Crelle, doi:10.1515/crelle-2015-0045.

② Abe, T.: Rings of microdifferential operators for arithmetic \mathscr{D}-modules, Bull. Soc. Math. Fr. 143 no.1, p.35-107 (2015), URL:http://smf4.emath.fr/Publications/Bulletin/143/html/smf_bull_143_35-107.php

③ Abe, T., Marmora, A.: On p-adic product formula for epsilon factors, J. Inst. Math. Jussieu 14 no.2, p.275-377 (2015), doi:10.1017/S1474748014000024.

④ Abe, T.: Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincare duality in the theory of arithmetic \mathscr{D}-modules, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 131 no.1, p.89–149 (2014), doi:10.4171/RSMUP/131-7.

〔学会発表〕（計 12 件）

① Abe, T.: Arithmetic D-modules and existence of crystalline companion, Geometrie analytique et equations differentielles p-adiques, (Luminy, France), 2017 年 3 月 29 日.

② Abe, T.: p 進コホモロジーとラングランズ対応, 日本数学会（総合講演）, 首都大学東京, （東京都八王子市), 2017 年 3 月 25 日.

③ Abe, T.: Arithmetic \mathcal{D}-modules and Langlands correspondences for function fields, D-modules and singularities, University of Padova (Padova, Italy), 2015 年 9 月 14 日.

④ Abe, T.: Arithmetic \mathcal{D}-modules and Langlands correspondence, ``D-modules and Singularities'' at First Joint International Meeting RSME-SCM-SEMA-SIMAI-UMI, (Bilbao, Spain), 2014 年 7 月 1 日.

〔その他〕

ホームページ等

http://db.ipmu.jp/member/personal/1417ja.html

アウトリーチ：

「微分から見た幾何学 ～やわらかい図形・かたい図形」, 2015 年 7 月 12 日, 多摩六都科学館

６．研究組織

(1)研究代表者

阿部 知行（ABE, Tomoyuki）

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・准教授

研究者番号：70609289

(2)研究分担者

(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者

(　　　)