

平成 29 年 6 月 6 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800005

研究課題名(和文)ラングランズ対応の枠組みをモチビクホモトピー論を用いて拡大する研究

研究課題名(英文)The Langlands setup in the context of motivic homotopy theory.

研究代表者

近藤 智(Kondo, Satoshi)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・客員准科学研究員

研究者番号：30372577

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：ラングランズ対応をモチビクホモトピー論を用いて理解を深めることが目的だった。位相幾何学的な動機からは、点つき曲線の埋め込みのモジュライに、モジュラーオペラッドと呼ばれる、結合則に関する性質構造があることを示した。保型側の表現論に関しては、その圏をトポスとしてもつサイトのとある特徴づけを行った。これらふたつの動機はモチビクホモトピー論と関係するが、技術的にはまったく関係がないままとなった。ベイリンソン予想への応用は得られなかった。

研究成果の概要(英文)：The aim was to understand better the Langlands correspondence using motivic homotopy theory. From the topological point of view, we constructed a structure called modular operad (concerning the composition law) on the moduli of embeddings of pointed curves. Concerning the automorphic representation theory, we gave certain axioms on sites such that when they are met, the topos is equivalent to the category of representations of some locally profinite groups. The motivations of the two results above are related to motivic homotopy theory, but there is no direct technical relation. We did not obtain an application to the Beilinson conjectures.

研究分野：数論幾何学

キーワード：ラングランズ対応 ガロア圏 オペラッド

1. 研究開始当初の背景

整数論におけるラングランズ対応は、さまざまな別形(局所、大域、正標数、幾何的)があり、ミラー対称性などにも現れるような、普遍的なアイデアである。ガロア側と保型側を結びつける対応は、局所の場合には証明が完了しており、大域の場合にも正標数の場合にはできているが、まだ大域で標数ゼロの場合にはできていない。局所の証明は大域的な方法しか知られておらず、よりよい理解が望まれている。

現在最も有用な手法はp進的なものである。ただし、幾何的ラングランズはベクトル束のモジュライ上のD加群に関するもので、方法は似ていない。また、この方法はモチビクホモトピー論以前に確立されたもので、モチーフ論的な見直しは行われていない。

近年発展した整数論の有用な道具として、モチビクホモトピー論がある。これは、位相幾何学ホモトピー論を代数幾何学に輸入したもので、現在もその整備、一般化が行われている。これは、コホモロジー論を、あるサイト上の単体的複体層を用いて記述するものである。

ラングランズ対応は、志村多様体(やそれに類する代数多様体)のエータルコホモロジーで実現されるという形で知られているが、ホモトピー論では、コボルディズム、楕円コホモロジーなど、構造が豊富な一般コホモロジー論が無数に存在する。それらの中では保型関数が自然に現れるものもあるが、ラングランズ的な解釈は知られていない。

気をつけるのは、ラングランズ対応はモチーフ論とは無関係であるということである。モチーフ論は、すべてのコホモロジー的な減少はモチーフ的である、とするが、ラングランズ対応はエータルコホモロジーで捕らえられる現象なので、モチーフ論は必要ではない。したがって、これまでに問題をモチーフ論的に扱うという試みはなされていない。

2. 研究の目的

ラングランズ対応の枠組みをモチビクホモトピー論的に拡大することで、その普遍的なアイデアをよりよく理解することが目的である。

志村多様体のコホモロジー(より正確にはエータルコホモロジー)にラングランズ対応は実現される。この点をより一般のコホモロジー論にした場合にどのようなことになるか、といったことは考察されていない。志村多様体のいろいろなコホモロジーを考察することが、モチビクホモトピー論を考えること

で可能になる。

表現論においては、ある対応を実現するために、旗多様体やそれに構造を付加した多様体のコホモロジーを取る、といったことは頻繁に行われている。近年では、エータル(あるいは位相的な)コホモロジーではなく、K理論のほうが有用である、といった現象も確認されている。このように、志村多様体のエータルコホモロジーでなく、より一般のコホモロジー理論を考えるために、モチビクホモトピー論を用いることが有用である。

3. 研究の方法

ひとつめの方法は次のとおり。一般的に、モチビクホモトピー論の命題は、代数トポロジーからくるものが多い。そこで、代数トポロジーにおけるマドセン・ワイスの定理のモチビクホモトピー論における類似を考える。マドセン・ワイスの定理は、曲線のモジュライ空間のホモトピー型を決定する。曲線のモジュライ空間は、グロタンディークタイヒミュラー群と関係しており、有理数体の絶対ガロア群と関係する。このように、ガロア群の問題を、ホモトピー論の枠組みで考えることが、ラングランズ対応と、遠くではあるが、関連付けられる。

ふたつめの方法は次のとおり。ラングランズ対応には、ガロア側と保型側があるが、これらの間には、直接の関係がない。したがって、同一に扱えるような枠組みが望まれる。一方で、モチビクホモトピー論は単体的層の一般論である。それに近づくため、保型側を層の圏として扱えるような、サイトの一般論を構築する。ガロア群の表現の圏は、グロタンディークのガロア圏上の層のなすトポスとして捕らえることができる。上に挙げたような動機から、保型表現の圏をあるサイト上の層の圏として表す、という問題が考えられる。ガロア圏とは、ある種の公理を満たす圏のことである。保型表現の圏に関しても似たような公理系を考える。

4. 研究成果

ひとつめの方法にある、マドセン・ワイスの定理のモチビクな類似は得られなかったが、次のような成果があった。マドセン・ワイスの定理の証明のアイデアに現れるものとして、曲線の埋め込みのなす空間がある。私は、共著論文 “Modular operads of embedded curves” において、点つき曲線の埋め込みのモジュライ上に、モジュラーオペラッドの構造が入ることを示した。この構造は、代数トポロジーにおいては、ループ空間を特徴付けるような構造になっているが、モチビクホモトピー論ではそれほど強い性質を導くことはなさそうではある。しかし、

そもそも、代数多様体であってモジュラーオペラッドの構造を持つような例というのはこれまで多くは知られていない。どのような問題を考えるかということを含めて、今後の課題を提供する結果であるといえるだろう。

ふたつめの方法について。安田正大氏(大阪大学)との共著のプレプリント "Sites whose topoi are the smooth representations of locally profinite groups" arXiv:1506.08023 において、次のような結果を得た。まず、サイトについての条件をいくつか与える。定理は、それらの条件を満たすサイト上の層の圏は、ある局所副有限群が存在して、その表現の圏と同値になる、というものである。これは、グロタンディークのガロア圏の副有限群の場合の拡張とみなすことができる。このような結果は、Caramello が圏論的な手法で得ているが、われわれの結果は有限性をより前面に出したもので、数論的な応用を視野にいたした設定になっている。具体的に、どのようなサイトがどのような群を与えるか、といった事も計算することができ、そういった応用はこれから行われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

1. "Modular operads of embedded curves", Satoshi Kondo, Charles Siegel, Jesse Wolfson, *Geometry and Topology* 21 (2017) 903-922 (査読あり)
2. "On two higher Chow groups of schemes over a finite field", Satoshi Kondo, Seidai Yasuda. *Doc. Math., J. DMV* 20, 737-752 (2015). (査読あり)
3. "The Riemann-Roch theorem without denominators in motivic homotopy theory", Satoshi Kondo, Seidai Yasuda, *J. Pure Appl. Algebra*, 218, No. 8, pp.1478-1495 (2014), doi:10.1016/j.jpaa.2013.12.001 (査読あり)

[学会発表](計 13 件)

1. "On the $CH^2(-,1)$ of product of two elliptic curves over $F_q(T)$ ", Satoshi Kondo, Conference "Zeta functions 6", Independent University of Moscow, Moscow, Russia 2016/12/8
2. "Operads of PGL-torsor on moduli of curves", Satoshi Kondo, Seminari de Geometria Algebraica UB-UPC-UAB, Barcelona, Spain, 2016/10/20
3. "Modular symbols for $PGL(d)$ in positive characteristic", Satoshi Kondo, Math Faculty, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 2016/10/18

4. Erasmus lectures "Riemann-Roch for curves over finite fields", Satoshi Kondo, Universitat Barcelona Autònoma, Barcelona, Spain, 2016/10/17, 19, 20
5. "Introduction to motivic cohomology and algebraic K-theory", Satoshi Kondo, BARCELONA SPRING 2016 WORKSHOP ON NUMBER THEORY AND K-THEORY, Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Bellaterra, Spain 2016/4/20
6. "Motivic cohomology of curves and varieties over a finite field (I)", Satoshi Kondo, BARCELONA SPRING 2016 WORKSHOP ON NUMBER THEORY AND K-THEORY, Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Bellaterra, Spain 2016/4/22
7. "Motivic cohomology of curves and varieties over a finite field (II)", Satoshi Kondo, BARCELONA SPRING 2016 WORKSHOP ON NUMBER THEORY AND K-THEORY, Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Bellaterra, Spain 2016/4/23
8. "Operads of embeddings of curves", Satoshi Kondo, Homotopy seminar, Higher School of Economics, Moscow, Russia, 2016/4/11
9. "Modular Symbols for PGL in positive characteristic", Satoshi Kondo, Algebraic geometry seminar, Higher school of Economics, Moscow, Russia, 2015/10/02
10. "On curves of genus 1 or 2 over function fields with large rational K_2 group", Satoshi Kondo, Zeta Functions 5, Independent University, Moscow, Russia, 2014/12/03
11. "On Collino's cycles over a nonarchimedean local fields: genus two example", Satoshi Kondo, East Asian Number Theory Conference 2014, Nishijin Plaza, Fukuoka, 2014/01/23
12. "The construction of irreducible representations of $GL(n,F)$ using multisegments", Satoshi Kondo, Number Theory summerschool 2013 "Introduction to representation theory of p-adic reductive groups" Hakone, Kanagawa 2013/09/03
13. "The construction of irreducible representations of $GL(n,F)$ using multisegments", Satoshi Kondo, Mini-conference "Representation theory of p-adic algebraic groups" The University of Tokyo, Komaba, Tokyo 2013/07/28

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

近藤 智 (KONDO, Satoshi)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・客員准科学的研究員

研究者番号：30372577

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()