

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 16 日現在

機関番号：12701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800008

研究課題名(和文)アーベル多様体のモジュライ空間に入る階層構造と葉層構造の研究

研究課題名(英文)Stratifications and foliations on the moduli space of abelian varieties

研究代表者

原下 秀士 (Harashita, Shushi)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・准教授

研究者番号：70396852

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：アーベル多様体のモジュライ空間は代数学に多くの応用を持つ空間であり、本研究は、その空間の階層や葉層構造を調べることが目標とした。先ず、Ekedahl-Oort階層と似ている distinguished Deligne-Lusztig 多様体のアフィン性について新しい判定法を提出し証明に成功した。また、工藤桃成氏との論文では種数4標数7以下の超特別曲線の数え上げについても成功し、種数4標数7の超特別曲線の非存在(Ekedahlのある問への否定的解決)を証明することが出来た。その他、飽和NPを持つp-可除群の研究でも大きな成功があり、樋口伸宏氏との共同研究でも新しい知見が得られた。

研究成果の概要(英文)：The moduli space of abelian varieties has many applications in algebra. The aim of this research is to investigate the stratifications and the foliations on the space in positive characteristic. We succeeded in giving a new criterion for the affineness of the distinguished Deligne-Lusztig varieties, which have similar structures as the Ekedahl Oort strata on the moduli space of abelian varieties. Moreover, Momonari Kudo and I enumerated superspecial curves of genus 4 in characteristic at most 7. Particularly we proved the non-existence of superspecial curves of genus 4 in characteristic 7 (a negative answer to a question by Ekedahl in 1987). Besides, we obtained results on p-divisible groups with saturated Newton polygons and got some new knowledge via a collaboration with Nobuhiro Higuchi.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学 アーベル多様体 モジュライ空間 p-可除群 Deligne-Lusztig多様体 超特別曲線 最大曲線

1. 研究開始当初の背景

アーベル多様体のモジュライ空間や曲線のモジュライ空間は、代数幾何学や整数論における中心的な研究対象であると同時に、これまで多くの応用を生み出してきた母体として重要な空間であると言える。本研究では、そのモジュライ空間を正標数の体上で考え、Newton polygon 階層や Ekedahl-Oort 階層などの階層構造に加え、近年 Oort によって定義された葉層構造についても、基本性質を調べることを目的とした。研究開始の時点で、階層構造については、次元やその境界など多くのことが分かっている状況にあったが、葉層構造については多くの未解決問題が残されていた。特に、その境界については全く分かっていないと言ってよい状態であった。さらに、曲線の場合においては、階層構造においても、系統的な研究は、殆どなされていなく状況であった。

2. 研究の目的

アーベル多様体およびそのモジュライ空間は、基本的な研究対象であるが、高次元の場合、その基本構造においても未解決問題が数多く残されている。本研究の目的は、高次元における、正標数の体上の上記モジュライ空間に入る内部構造（階層構造や葉層構造）の基本性質について、予想を提示したり、証明を与えたりすることである。特に葉層構造については、その配置など重要部分が依然不明であり、その解決を目指し、幾つかの基本定理の整備することを目標とする。また、志村多様体への一般化、Deligne-Lusztig 多様体などの関連する多様体の研究、代数群の算術など関連分野での貢献も並行して行ってゆきたい。また、曲線の場合の研究の糸口についても模索する。

以下、具体的に述べて行く。先ず、ある種の（詳しくは distinguished と呼ばれるものであるが）Deligne-Lusztig varieties のアフィン性を調べ、Ekedahl-Oort 階層のアフィン性の研究に繋げるような仕事を行う。また、飽和 Newton polygon をもつ p -可除群（の族）は、ある弱い条件下のもと、fiber がすべて極小である p -可除群（の族）へ同種が存在することを証明することで、葉層の境界を調べる際、基本的に、fiber がすべて極小である場合を考察することが本質的になり、問題の大幅な簡略化が可能になるという筋書きを考えている。また、曲線の場合には、低種数低標数における超特別曲線の数え上げを行うことを考えており、その技術を少し進めることにより、曲線の場合の階層構造の研究に糸口が得られるのではないかと考えている。

3. 研究の方法

アーベル多様体のモジュライ空間や、より一般の志村多様体の研究において、長い歴史ある Newton polygon 階層の構造を明らかに

することは、やはり最も重要な課題である。Newton polygon 階層には、Oort [1] が証明した、central leaf と isogeny leaf による almost product structure があるため、central leaves や isogeny leaves の構造が重要である。それらの詳細な研究を行いたい。その研究の為に、ここ数年で大きく発展し比較的扱いやすい Ekedahl-Oort 階層の理論を利用したり、さらに進化させる必要もあると考えている。まず、24年度 Oort 教授を訪問した際に大きな進展が得られた central leaves の境界の決定を目指したい。飽和 Newton polygon をもつ p -可除群の同種類の決定を行うことは大きな糸口になると考えている。また、Deligne-Lusztig 多様体の幾何学、曲線の場合の研究など、関連分野でも幾つか研究を計画している。極小 p -可除群の特殊化を詳細に研究し、特に central streams の境界の各成分の一般元の Newton polygon を決定すれば、central leaves の境界の決定の大きなステップをクリアすることになると考えているので、その課題にも取り組んでいく。

[1] F. Oort: Foliations in moduli spaces of abelian varieties. J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), no. 2, 267-296.

4. 研究成果

(1) アーベル多様体のモジュライ空間に入る Ekedahl-Oort 階層と似た構造をもつ、distinguished Deligne-Lusztig varieties について研究し、そのアフィン性について、（長い歴史を持つこの課題に対し）先行研究より強い判定法を得ることが出来た。

(2) 九州大学の工藤桃成氏との共同研究により、種数4標数7以下の超特別曲線の数え上げに成功した。特に、種数4標数7の超特別曲線は存在しないことを、証明することが出来た。これは、Ekedahl の1987年のある問について、ある種の部分的解決を与えたことになった。この研究は、曲線のモジュライ空間の階層構造の研究への糸口になると期待している。

(3) 飽和 Newton polygon をもつ p -可除群の同種類の分類に成功した。（論文は2017年度に Nagoya Mathematical Journal に採録が決定している。）この結果は、葉層の境界を調べる際の強力な道具になると考えており、意義深い。

(4) 本研究室の樋口伸宏君と極小 p -可除群の特殊化について研究し、Newton polygon との美しい関係について新しい証明を与えることが出来た。樋口君はさらに研究を進めており、central streams の境界成分の Newton polygon の決定が完成すれば、葉層の境界の解明への大きな糸口となる。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

M. Kudo and S. Harashita:
Superspecial curves of genus 4 in small characteristic.
Finite Fields and Their Applications, **45** (2017), 131-169. (2016年12月に採録決定). 査読有.
<https://doi.org/10.1016/j.ffa.2016.12.001>

S. Harashita:
On the affineness of distinguished Deligne-Lusztig varieties.
Journal of Algebra **390** (2013), 290-297.
査読有.
<https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.05.025>

[学会発表](計 11 件)

原下秀土:
低標数の種数 4 の超特別曲線について,
九州代数的整数論 2017 (KANT2017), 2017年3月8日, 九州大学(福岡県).

Shushi Harashita:
Superspecial curves of genus 4 in small characteristic,
10th Conference on Arithmetic and Algebraic Geometry, 2016年12月12日,
The University of Tokyo(東京都).

Shushi Harashita:
On p-divisible groups with saturated Newton polygons,
Workshop on Shimura varieties, representation theory and related topics.
2016年11月23日. Kyoto University(京都府).

原下秀土:
飽和 Newton polygons をもつ p-可除群について,
九大代数学セミナー, 2016年6月16日, 九州大学(福岡県).

原下秀土:
On p-divisible groups with saturated Newton polygons,
Workshop on “Moduli spaces of abelian varieties and curves, and related analysis”,
2015年12月16日, 東京大学数理科学研究科(東京都).

原下秀土:

Introduction to moduli spaces of abelian varieties in positive characteristic,
Workshop on “Moduli spaces of abelian varieties and curves, and related analysis”,
2015年12月15日, 東京大学数理科学研究科(東京都).

原下秀土:

アーベル多様体のモジュライ空間に入る階層構造,
Arithmetic Geometry Seminar, 2014年9月17~19日, 北海道大学理学部(北海道).

原下秀土:

A new parametrization of BT_1's,
愛媛整数論ミニ研究集会 2014年8月9日,
愛媛大学大学院理工学研究科(愛媛県).

原下秀土:

p-可除群の葉層の境界について,
大阪大学整数論・保型形式セミナー, 2014年1月17日, 大阪大学理学研究科数学専攻(大阪府).

原下秀土:

p-可除群の葉層の境界について,
早稲田整数論セミナー, 2013年10月11日,
早稲田大学西早稲田キャンパス(東京都).

原下秀土:

Remarks on p-divisible groups with a leaf deformation I, II,
ミニ集会「跡公式と、関連する話題について」,
2013年9月8日, 東京大学数理科学研究科(東京都).

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

http://er-web.jmk.ynu.ac.jp/html/HARASHITA_Shushi/ja.html

6．研究組織

(1)研究代表者

原下秀士 (HARASHITA, Shushi)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・准教授

研究者番号：70396852