

平成 28 年 6 月 14 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800010

研究課題名(和文) 安定性条件の空間と双曲性についての研究

研究課題名(英文) Hyperbolicity of the Space of Stability Conditions

研究代表者

川谷 康太郎 (Kawatani, Kotaro)

名古屋大学・多元数理科学研究科・博士研究員

研究者番号：90622150

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000 円

研究成果の概要(和文)：主な研究成果は、2次元D型特異点上の純層の分類についてである。分類といっても、分類が完成したのではなく、分類することが困難であることが研究して分かった。2次元A型特異点の場合は、石井-上原により分類が完成されている。この場合の結果は、Grothendieckによる射影直線の直規約ベクトル束の分類とパラレルな結果が成り立つ。

一方で、本研究を通じて分かったことは、D型特異点の場合は、いくらでも大きい階数の直規約なベクトル束存在することが分かった。

研究成果の概要(英文)：The main results of these program is "the classification" of pure sheaves on type D singular points. More precisely, we show that it is impossible to classify pure sheaves on type D singular points. We have to remark that

研究分野：代数幾何

キーワード：連接層の導来圏 安定性条件の空間

1. 研究開始当初の背景

ここで考える圏は 2 次元 Calabi-Yau 圏である. つまり Serre 関手が 2 回シフトになる三角圏である. もっとも典型的な例は, K3 曲面 X (または abel 曲面上) の接続層のなす導来圏 $D^b(X)$ ($\sim$ 層の複体のなす圏) である. K3 曲面の導来圏の他に, 有理二重特異点から構成される圏が例としてある. Kac-Moody Lie 環が, (i) 有限型, (ii) Affine 型, (iii) indefinite 型の 3 通りあるのと同様に, 2 次元 Calabi-Yau 圏も主に 3 種類知られている. たとえば, K3 曲面の導来圏は (iii) であり, 有理二重特異点から構成される圏は (i) または (ii) がある. ここでは, これらの圏を念頭に置いている.

まず 2002 年に Bridgeland は「(三角) 圏に対する安定性条件」という概念を定義した ([2]). (三角) 圏が特に代数多様体 X の接続層の導来圏 $D^b(X)$ ($\sim$ 層の複体のなす圏) の場合を考える. これの一つの見方として, 接続層に対する μ -安定性から接続層の複体に対する“安定性”への拡張, とみれる. そして, μ -安定性は X 上の豊富直線束 L を一つ決める毎に定まっていた. 別の見方をすれば, μ -安定性の“モジュライ空間”は, 豊富直線束たちからなる錘であった. これと同様に, $D(X)$ 上の安定性条件達の集合は, 空でなければ各連結成分は複素多様体となることが知られている. そして, 具体的に X が K3 曲面の場合に $D(X)$ 上の安定性条件集合 $\text{Stab}(X)$ は空でないことが知られている ([3]). というのも, $\text{Stab}(X)$ のある連結成分 $\Sigma(X)$ を明示的に構成されているからである.

私は特に, K3 曲面の接続層の導来圏上の安定性条件の空間の単連結性について研究していた. 当時は, Picard 数 1 の K3 曲面の場合には予想が簡単になり解決出来るのではないかとという期待があった. 残念ながら, 自分で解決することは出来ず, 予想がなりつための, 当時は意外な (しかし後になって振り返ると当たり前の) 必要十分条件を見つけるのに留まった. そして, 当時, 自分で見つけた単連結性のための必要十分条件が実際に成り立つことをどうやって証明すべきかを研究していた.

2. 研究の目的

研究の目的は, 一般の K3 曲面について安定性条件の空間の単連結性を解決することであった.

もともと, 上記の 2 次元 Calabi-Yau 圏について, 安定性条件の空間は空でないことが知られている ([3], [4]) そして, これらの場合に安定性条件の空

間は連結かつ単連結であることが予想されている. 実際, A 型特異点の場合には石井-植田-上原により予想が肯定的に解決されている ([7])

これらの予想はいくつかの興味深い点がある. まず, K3 曲面の場合に, 予想が正しければ, その導来圏の自己同型群が決定できる. 一般に, 多様体の標準束が自明な場合に, その多様体の導来圏の自己同型群を決定することは困難であるため, これは有意義なことである. そして, 有理二重特異点の場合の安定性条件の空間の単連結性は, Brieskorn に端を発する $K(\pi, 1)$ -予想 ([5]) と密接な関連にあり, これもまた興味深い.

3. 研究の方法

K3 曲面の接続層の導来圏上の安定性条件の空間は, IV 型対称領域上の被覆空間として実現されている. 一方で, IV 型対称領域上の保型形式を構成する方法として, Borchers 積と呼ばれる方法がある. この方法を, 安定性条件の空間の場合に拡張し, その帰結として安定性条件の空間の単連結性を示すことが, 当初に考えていた研究の方法であった. そのために, 習熟しなければならない課題は頂点作用素代数であった. K3 曲面の導来圏から, どのようにして頂点作用素代数 (または, 頂点作用素代数とは限らない一般の代数系) を構成するためのアイディアを得ることが重要な課題である.

4. 研究成果

まず, 否定的な側面から述べる. 一つは, K3 曲面の導来圏から頂点作用素代数を構成するアイディアを得ることは, 非常に困難な課題であることが分かった. 今も, 具体的にどうすればよいかわかっていない. ただ, 導来圏のような三角圏ではなく, Differential Graded 圏を考えた方が将来的に有望ではないか, ということを認識したことは個人的に有益であったと考える. すぐには成果に反映されないだろうが, 今後数年の長い目で見ると, 重要な認識となるはずである.

そして, もう一つ残念なことに, Picard 数 1 の場合の K3 曲面の安定性条件の空間の単連結性は Bayer-Bridgeland により解決されてしまった ([1]), ということがある. これは, 当初の「Picard 数 1 の場合に予想は解ける」という期待は正しかったことを意味する. しかし同時に, 自分の期待を自ら解決できるだけの実力が足りなかったことも示唆してしまっている.

そして、今後の課題として、Bayer-Bridgeland による証明の詳細を一般の Picard 数への拡張は誰もが考えることである。現在、それは現実的ではない。これらの課題を克服し、K3 曲面の導来圏のみならず、有理二重特異点に付随する導来圏の場合なども念頭においた、安定性条件の空間の単連結性を解決するためには、根本的に新しいアイデアが必要だと考えられる。

また、これらに関連して、 D 型特異点の場合に、安定性条件の空間の連結性についても研究した。冒頭で述べた石井-植田-上原による研究を、 D 型の場合に拡張することが目的であったが目立った成功は未だ得られていない。ただ、この方針で解決を目指す場合に次のことが問題となる： D 型特異点の基本サイクル上の純層を分類できるか？たとえば、 A 型、とくに A_1 型の場合、この問題を言い換えると、次のようになる：射影直線上のベクトル束を分類できるか？周知のように、この問題は解くことが可能である。その結果は、所謂、Grothendieck の定理である。つまり、Grothendieck の定理のある種の一般化が可能か？という問題を解かねば、上の方針での解決は望めない。そして、先の方針で研究が上手く行かないのは、この問題が解けないからである。

ただ、幾分興味深いことも分かった。まず、Grothendieck の定理は、射影直線の自然な拡張として射影空間の場合に一時期研究されていた。たとえば、4 次元以下の射影空間 $\mathbb{P}^n$ ($2 \leq n \leq 4$) の場合には、階数 2 のベクトルで直既約なものが存在することが知られている。より高次元で、直既約ベクトル束が存在について研究されていた時期がある¹。この問題の重要性はさておき、ここで幾分面白いのは、高階数の直既約なベクトル束を見つけることに苦労しているということである。

射影空間の場合と比べると、有理二重特異点の基本サイクルの場合には、状況が異なる。まず、 A 型特異点の場合には、Grothendieck の定理がそのまま一般化出来る。これは石井-上原による研究である ([6])。従って、この研究を D 型の場合に拡張することを目指すことは至極自然である。こうして、上で述べた問題を解くことが課題となる。

しかし、先述の通り、この問題は未だ解決に至っていない。しかし、次のことが分かった：

1. D 型の被約基本サイクル上の純層はいくらでも大きい“階数”の純層が存在する。
2. しかし rigid な純層に限ると、純層の“階数”は上に有界である。

まず、被約基本サイクル上の場合にしか研究できていない事がこの研究の欠点である。そして、ここで考えている概型は既約ではないので、階数の定義が問題である。ここでは、これらの問題棚に上げ、利点について考える。1 は、高次元の射影空間の場合と比べると、対照的であり興味深い。つまり、純層を分類することが困難であることを示唆している。

安定性条件の空間の連結性、というも元来の問題に立ち返ってみよう。この場合、実は全ての純層を分類する必要は無い。rigid な純層だけ分類できれば十分なのである。それを鑑みると、2 は微妙な問題を提起している。1 の知見に経つと、純層の分類問題は不可能であるかのように見える。しかし、元来の問題意識に立ち返ると、1 が分かったからといって、諦める理由にならないことを 2 が主張している。各して、 A 型の場合にはスッキリ解決出来た問題が、 D 型の場合には随分と微妙な問題に成ることが分かったのである。この研究を公表するかどうかは、今後の研究の進展具合によって決定したい。

〈引用文献〉

- [1] A. Bayer and T. Bridgeland, Derived automorphism groups of K3 surfaces of Picard rank 1, arXiv.math:1310.8266.
- [2] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. **166** (2007), 317–345.
- [3] T. Bridgeland, *Stability conditions on K3 surfaces*, Duke Math. J. **141** (2008), 241–291.
- [4] T. Bridgeland, *Stability conditions and Kleinian singularities*, I.M.R.N. **21** (2009), 4142–4157.
- [5] E. Brieskorn, *Sur les groupes de tresses*, Séminaire Bourbaki (1971), Exp. No. 401, 21–44.
- [6] A. Ishii and H. Uehara, *Autoequivalences of derived categories on the minimal resolutions of A_n -singularities on surfaces*, J. Differential Geometry **71** (2005), 384–435.
- [7] A. Ishii, K. Ueda and H. Uehara, *Stability conditions on A_n singularities*, J. Differential Geometry **84** (2010), 87–126.

¹個人的には、今は研究されていないテーマだと考える。率直に言って、問題意識が“安く”重要とは言えない、というのが個人的な意見である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. K. Kawatani *Stability of Gieseker stable sheaves on K3 surfaces in the sense of Bridgeland and some applications*, Kyoto J. Math. **53** (2013), 597–627.
2. K. Kawatani, *Fourier-Mukai transformations on K3 surfaces with $\rho = 1$ and Atkin-Lehner involutions*, Journal of Algebra **417** (2014) 103–115.

[学会発表] (計 8 件)

1. ○ 川谷康太郎, “Fourier-Mukai 亜群と Atkin-Lehner 群”(口頭). ワークショップ Hodge 理論と代数幾何, 東京電機大学 (北千住キャンパス), 2013 年 8 月 5 日～6 日.
2. ○ Kotaro Kawatani, “A hyperbolic metric and stability conditions on K3 surfaces with Picard rank 1”(口頭). 5th Algebraic Geometry in East Asia, Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Science, Beijing, China, 2013 年 10 月 14 日～18 日.
3. ○ 川谷康太郎, “Picard 数 1 の K3 曲面上の安定性条件と上半平面”(口頭). 広島大学代数セミナー, 広島大学, 2013 年 11 月 1 日.
4. ○ 川谷康太郎, “三角圏の安定性条件の理論入門”(口頭). 東北大学代数幾何学セミナー, 東北大学, 2014 年 5 月 9 日.
5. ○ 川谷康太郎, “K3 曲面上の安定性条件と Fourier-Mukai 変換”(口頭). 東北大学代数幾何学セミナー, 東北大学, 2014 年 5 月 9 日.
6. ○ 川谷康太郎, “Stability conditions and Fourier-Mukai transformations on K3 surfaces with $\rho = 1$ ”(口頭). 第 8 回代数曲面ワークショップ at 秋葉原, 首都大学東京 秋葉原サテライトキャンパス, 2014 年 10 月 11 日.
7. ○ 川谷康太郎, “Stability conditions and Fourier-Mukai transformations on K3 surfaces with $\rho = 1$ ”(口頭). 代数幾何学城崎シンポジウム 2014, 城崎国際アートセンター, 2014 年 10 月 20～24 日.

8. ○ 川谷康太郎, “Pure sheaves on D_4 -singularity”, 代数幾何ミニ研究集会, 埼玉大学, 2015 年 3 月 10～11 日.

[図書] (計 0 件)

1. なし.

[産業財産権] (計 0 件)

なし.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川谷 康太郎 (KAWATANI, Kotaro)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・博士研究員

研究者番号：90622150