

平成 29 年 6 月 6 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800017

研究課題名(和文) 連接層の導来圏に関する諸問題の研究

研究課題名(英文) Study of problems related to derived category of coherent sheaves

研究代表者

大川 新之介 (Okawa, Shinnosuke)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：60646909

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：川谷康太郎氏と共同で導来圏の半直交分解と標準線型系の関係解明に取り組み、成果を得た。また、上原北斗氏と共同で2次Hirzebruch曲面上の例外層の構造を決定した。非可換代数幾何学関係の成果として、Tarig Abdelgadir・植田一石両氏と共同で非可換代数多様体を分類するモジュライ空間とそのコンパクト化の構成法を提起し、非可換del Pezzo曲面の場合に構造を調べた。また、佐野太郎氏と共に安定曲線のモジュライスタックの非可換変形の剛性について調べた。

研究成果の概要(英文)：With Kotaro Kawatani, we studied the relationship between the semi-orthogonal decompositions of the derived category of coherent sheaves and the canonical linear system. We obtained some results in this direction. Also with Hokuto Uehara, we identified the structure of the exceptional sheaves on the Hirzebruch surface of degree 2. Concerning noncommutative algebraic geometry, with Tarig Abdelgadir and Kazushi Ueda, we introduced a certain construction of compactified moduli spaces of noncommutative algebraic varieties and studied their structures for the case of noncommutative del Pezzo surfaces. Also with Taro Sano, we studied the noncommutative rigidity of the moduli stack of stable pointed curves.

研究分野：代数幾何学

キーワード：導来圏 双有理幾何学 半直交分解 非可換代数幾何学 del Pezzo曲面 Hirzebruch曲面 モジュライ例外対象

1. 研究開始当初の背景

いくつかの多項式の共通零点集合として表される図形を代数多様体とよぶ。代数多様体の諸性質を調べるのが代数幾何学である。代数多様体は(数学内外の)様々な文脈から自然に現れる対象であり、代数幾何学は諸分野との相互作用を通して発展してきたという歴史を持つ。

一方、最近数十年で、代数多様体上の接続層全体のなす導来圏に着目して代数多様体を研究するという視点の重要性が認識されるようになった。導来圏自体が比較的新しい対象であるために、研究開始当初においても様々なレベルの未解決問題が残っていた(これは現在でもそうであると言えよう)。例えば、導来圏を考える際には三角圏としての構造に注目するのであるが、三角圏の基本的構造として半直交分解というある種の分解がある。半直交分解の完全分類については報告者の2011年の論文まで(標準束が自明な多様体の場合を除いて)ほとんど何もわかっていなかった。この論文以降にも報告者は研究を続けていたが、それを引き続いて行ったものが後述の(1)である。

一方、導来圏が充満強例外対象列というある種の生成系を持つ時、導来圏は充満強例外対象列の自己準同型環(これは非可換代数になる。)上の加群の圏と同値になる。さらに、そのような非可換環は関係式つき籠として表現できる。これに着目して関係式つき籠の表現のモジュライを考察するという研究は多くあったのだが、一方で(固定した)籠の関係式のモジュライの研究は全くと言っていいほど為されていなかった。前者と後者の関係は、ちょうど層のモジュライと代数多様体のモジュライの間に相似であり、従って後者の方がより難しい。これに関する研究が後述の(2)である。

さて、与えられた導来圏の充満強例外対象列を分類するのは興味深い問題である。例えば、充満強例外対象列全体には組紐群が作用することが知られている。この分類問題は del Pezzo 曲面の場合に Kuleshov-Orlov の研究で大変よく理解されていたが、これを少し拡張した weak del Pezzo 曲面になると-2 曲線が与える"spherical twist"と呼ばれる自己圏同値のせいで途端に問題が難しくなるということがわかっていった。例えば del Pezzo 曲面上の例外対象は必ず層になるが、weak del Pezzo の場合には任意の長さの複体になり得る等。これに関する研究が後述の(3)である。

2. 研究の目的

以下の諸問題に取り組み、解決ないし進展をはかるのが目的であった。

(1) 導来圏の半直交分解の研究

導来圏の半直交分解は多様体の幾何的性質を反映する傾向があり、特に多様体の極小モ

デルプログラムに応じて圏に半直交分解が生じると予想されている(基本的な場合に証明されている)。一方、報告者の先行研究により、1次元においては極小モデルプログラムに由来しない半直交分解は存在しないこと、および2次元以上ではそうでないということがわかっていった。2次元以上において半直交分解がどのように統制されるのか、ということ標準束の性質と関係づけて明らかにするのが目的であった。

(2) 非可換 del Pezzo 曲面のモジュライ空間およびそのコンパクト化の構成と研究

上述のような圏同値があるという意味で代数多様体は充満強例外対象列の自己準同型環と同一視できるので、自己準同型環の変形のモジュライを構成するとそれは元の代数多様体の(非可換)変形のモジュライと密接に関わると期待できた。ここで非可換変形とは、接続層のなすアーベル圏の平坦変形のことである。特に del Pezzo 曲面は非可換変形が障害を受けないため、モジュライは比較的調べやすいものになるはずであるという見通しがあった。従って、特にこの場合に自己準同型環の変形のモジュライを籠の関係式のモジュライとして構成し、その構造を研究するというのが目的であった。

(3) Hirzebruch 曲面 F_2 上の例外対象の分類

Weak del Pezzo 曲面の中で最も簡単なものが標題の曲面 F_2 であり、この場合に例外対象を分類するのが目的であった。より正確には、任意の例外対象は例外ベクトル束に spherical twist を有限回ほどこして得られる、というのが予想であった。

3. 研究の方法

(1)については、半直交分解と標準線型系の関係を、標準束と Serre functor の関係に着目して捉えるという視点を追求した。具体的には、半直交分解の因子としてあらわれる部分圏の台と標準線型系の固定点集合との関係を明らかにし、また、半直交分解の変形に関する剛性を調べた。

(2)については、上述のように充満強例外対象列の自己準同型環が籠の道代数の関係式による剰余環として書けることを利用し、関係式のモジュライを幾何学的不変式によって構成することによってモジュライ空間およびそのコンパクト化を構成した。さらに、Artin-Tate-Van den Bergh の意味の非可換射影平面との比較を通してある種の構造つき楕円曲線のモジュライ空間との比較も行った。この方法により、モジュライの大域的な構造がより明確に理解できた。

(3)については、例外層の場合を主に調べた。特に、層のねじれ部分を -2 曲線上の層の安定性に着目して調べるといった方法をとった。

4. 研究成果

(1)については、得られた結果をまとめてプレプリントとしてarXivに発表することができた。この中では、標準線型系の固定点集合が有限ならば半直交分解が存在しない事や、bielliptic surface上に半直交分解が存在しない事が証明されている。その後、Alexander Kuznetsov氏からHochschild homologyに着目した解釈を提示され、その応用として極小でない曲面上の半直交分解を一部分類することができた。

(2)については、プロトタイプであるところの非可換射影平面の場合にモジュライ空間の構造を決定し、プレプリントとして発表した。この場合、モジュライの幾何学的不変式論による構成にあらわれる不変式環は一見複雑なのであるが、Vinbergによって導入された次数つきLie代数に関する“Weyl群の不変式論”を利用することでその構造が理解できるという点が大きかった。非可換2次曲面の場合にも同様にモジュライ空間の構造を調べて、プレプリントとして発表した。他の次数のdel Pezzo曲面についても研究を進め、特に次数3,2,1の場合にモジュライが8,9,10次元のトーリック多様体になることを明らかにした。また、圏同値類を保つようなモジュライへの離散無限群作用についても理解ができた。さらに、非可換射影平面および非可換2次曲面のモジュライ構成が量子情報理論の3-qutrit statesおよび4-qubit statesの分類問題と等価であることを指摘するプレプリントを発表した。

(3)については、例外対象全部の分類は想定以上に難しく、かなわなかった。ただし、部分的結果として例外層の分類はできた。特に、例外層は例外ベクトル束にspherical twistを高々一度ほどこすことで得られるということがわかった。この結果は論文として出版された。

以上に加えて、当初予定していなかった以下の研究結果を得た。

(4)佐野太郎氏と共同で、安定な点つき曲線のモジュライスタックの非可換剛性について調べた。具体的には、2次のHochschild cohomologyが消滅することを証明するために、Hochschild-Kostant-Rosenberg分解の直和因子としてあらわれる層係数コホモロジーたちの消滅を示すという方針を取った。特に種数0の場合には完全解決し、点の数が5の場合を除いてモジュライは非可換にも剛性を持つことを示した。種数正の場合につい

ても部分的な結果を得たが、引き続き研究である。得られた結果の一部はプレプリントとして発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

(1)

Shinnosuke Okawa, Surfaces of globally F-regular type are of Fano type, *Tohoku Mathematical Journal* 69 (2017), no. 1, 35-42. (査読あり)

<https://projecteuclid.org/euclid.tmj/1493172126>

(2)

Yujiro Kawamata and Shinnosuke Okawa, Mori dream spaces of Calabi-Yau type and log canonicity of Cox rings, *J. Reine Angew. Math.* 701 (2015), 195-203. (査読あり)
DOI:10.1515/crelle-2013-0029

(3)

Shinnosuke Okawa and Hokuto Uehara, Exceptional sheaves on the Hirzebruch surface F_2 , *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2015), no. 23, 12781-12803. (査読あり)
DOI:<https://doi.org/10.1093/imrn/rnv079>

(4)

Yoshinori Gongyo, Shinnosuke Okawa, Akiyoshi Sannai, and Shunsuke Takagi, Characterization of varieties of Fano type via singularities of Cox rings, *J. Algebraic Geom.* 24 (2015), no. 1, 159-182. (査読あり)
DOI:<https://doi.org/10.1090/S1056-3911-2014-00641-X>

(5)

Shinnosuke Okawa, On images of Mori dream spaces, *Math. Ann.* 364 (2016), no. 3-4, 1315-1342. (査読あり)
DOI:10.1007/s00208-015-1245-5

[学会発表](計21件)

(1)

大川新之介

Noncommutative del Pezzo surfaces and their compact moduli spaces, *Current Topics in Algebraic and Symplectic Geometry*, 京都大学, 2017年3月6日~10日

(2)

大川新之介

Compact moduli of marked noncommutative

del Pezzo surfaces , Generalized Geometry and Noncommutative Algebra,

Oxford University, オックスフォード(イギリス), 2016年12月5日~9日

(3)

大川新之介

Noncommutative projective planes and their moduli spaces, 静岡代数学セミナー, 静岡大学, 2016年11月25日~26日

(4)

大川新之介

On derived equivalence and Grothendieck ring of varieties, 都の西北代数幾何学シンポジウム, 早稲田大学, 2016年11月15日~18日

(5)

大川新之介

Minimal model theory for Brauer pairs, Categorical and Analytic invariants IV, Kavli IPMU, 柏市・千葉県, 2016年11月14日~18日

(6)

大川新之介

Derived equivalence and Grothendieck ring of varieties, Workshop on spherical varieties, Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, 三垂(中国), 2016年10月31日~11月4日

(7)

大川新之介

Compact moduli of marked noncommutative del Pezzo surfaces, Non-commutative, derived and homotopical methods in geometry, Universiteit Antwerpen, アントワープ(ベルギー), 2016年9月19日~24日

(8)

大川新之介

Noncommutative Hirzebruch surfaces Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 3, Higher School of Economics, モスクワ(ロシア), 2016年9月12日~16日

(9)

大川新之介

Compact moduli of marked noncommutative del Pezzo surfaces, 代数学シンポジウム, 佐賀大学, 2016年9月7日~11日

(10)

大川新之介

Noncommutative Hirzebruch surfaces, School and Workshop on Homological Methods in Algebra and Geometry, AIMS Ghana, ケ

ーブコースト(ガーナ), 2016年8月1日~12日

(11)

大川新之介

On noncommutative Hirzebruch surfaces, Non-commutative crepant resolutions, Ulrich Modules and generalizations of the McKay correspondence, 京都大学数理解析研究所, 2016年6月13日~17日

(12)

大川新之介

Compact moduli of marked noncommutative del Pezzo surfaces, The 4th Workshop ``Complex Geometry and Lie Groups'', 奈良女子大学, 2016年3月22日~26日

(13)

大川新之介

On noncommutative deformations of rational surfaces, Higher dimensional algebraic geometry and around, 神戸大学, 2016年2月1日~5日

(14)

大川新之介

Compact moduli spaces of noncommutative del Pezzo surfaces via quivers, Workshop on Deformation and moduli, 海雲台(韓国), 2016年1月20日~23日

(15)

大川新之介

Compact moduli of marked noncommutative cubic surfaces via quivers, Mirror Symmetry and Algebraic Geometry, 京都大学数理解析研究所, 2015年12月7日~9日

(16)

大川新之介

On semi-orthogonal decompositions of derived category of surfaces with non-negative Kodaira dimensions, Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry , Kavli IPMU, 千葉県・柏市, 2015年11月16日~20日

(17)

大川新之介

On noncommutative rigidity of the moduli stack of stable pointed curves, Higher Dimensional Algebraic Geometry 2015, 国立台湾大学, 台北(台湾), 2015年8月22日

(18)

大川新之介

Compact moduli of noncommutative projective planes, (非)可換代数とトポロ

ジー, 信州大学, 2014年2月19日~21日

(19)

大川新之介

Compact moduli of noncommutative projective planes and quadrics, YOUNGER GENERATIONS IN ALGEBRAIC AND COMPLEX GEOMETRY III, えきまえいきいきひろば (長崎市・長崎), 2014年1月6日~10日

(20)

大川新之介

Compact moduli of non-commutative del Pezzo surfaces, Mini workshop on birational geometry, 東大数理科学研究科, 2013年11月21日~22日

(21)

大川新之介

Compact moduli of non-commutative del Pezzo surfaces, Mini workshop on birational geometry, 東大数理科学研究科, 2013年11月21日~22日

〔その他〕

Moduli of relations of quivers and noncommutative algebraic geometry, 北海道大学集中講義, 2015年5月25日~29日

(プレプリント)

(1)

Atsushi Ito, Makoto Miura, Shinnosuke Okawa, Kazushi Ueda, The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring: via K3 surfaces of degree 12, <https://arxiv.org/abs/1612.08497>

(2)

Atsushi Ito, Makoto Miura, Shinnosuke Okawa, Kazushi Ueda, The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring: via G2-Grassmannians, <https://arxiv.org/abs/1606.04210>

(3)

Atsushi Ito, Makoto Miura, Shinnosuke Okawa, Kazushi Ueda, Calabi-Yau complete intersections in G2-Grassmannians, <https://arxiv.org/abs/1606.04076>

(4)

Kotaro Kawatani and Shinnosuke Okawa, Nonexistence of semiorthogonal decompositions and sections of the canonical bundle, <https://arxiv.org/abs/1508.00682>

(5)

Shinnosuke Okawa and Taro Sano,

Noncommutative rigidity of the moduli stack of stable pointed curves, <https://arxiv.org/abs/1412.7060>

(6)

Tarig Abdelgadir, Shinnosuke Okawa, Kazushi Ueda, Compact moduli of noncommutative projective planes, <https://arxiv.org/abs/1411.7770>

(7)

Shinnosuke Okawa and Kazushi Ueda, Noncommutative quadric surfaces and noncommutative conifolds, <https://arxiv.org/abs/1403.0713>

(8)

Shinnosuke Okawa and Kazushi Ueda, Quantum entanglement, Calabi-Yau manifolds, and noncommutative algebraic geometry, <https://arxiv.org/abs/1402.3768>

ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~okawa/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大川 新之介 (SHINNOBUKE OKAWA)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号: **60646909**