

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 31 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800019

研究課題名(和文)代数群に付随する Milnor 型 K 群と数論幾何学

研究課題名(英文)Milnor type K-group attached to algebraic groups and arithmetic geometry

研究代表者

平之内 俊郎(Hiranouchi, Toshiro)

広島大学・理学研究科・助教

研究者番号：30532551

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：研究期間に得られた成果は以下の通り：1. 染川予想と呼ばれる Galois 記号写像に関する予想を  $p$  進体上のある種の楕円曲線の場合に証明した。結果を論文としてまとめ *Funct. Approx. Comment. Math.* に掲載された。2. 正標数の局所体上の曲線に対する類体論を完成させた。論文を作成し現在投稿中。3. 関数体版の Hermite-Minkowski 型有限性の高次元化について、論文を作成し *J. Number Theory* に掲載された。4. 有理数体上の楕円曲線の素数冪等分点に付随する類数のある種の下限が得られた。

研究成果の概要(英文)：The results obtained during the research period are as follows: 1. For some elliptic curves over a  $p$ -adic field, we show a conjecture due to Somekawa on the Galois symbol map. Results have been published in *Funct. Approx. Comment. Math.* 2. We investigate the class field theory for an open curve over a local field. 3. We show the finiteness of étale coverings of such a variety with given degree whose ramification bounded along an effective Cartier divisor. This can be thought of a higher dimensional analogue of the classical Hermite-Minkowski theorem. 4. We give a lower bound of the class number of the number field associated to the  $p$ -power division points of elliptic curves over  $\mathbb{Q}$

研究分野：数論幾何学

キーワード：類体論 類数 数論的基本群

## 1. 研究開始当初の背景

Milnor による二次形式の分類に引き続いて 1970 年代に Bloch と加藤は体  $F$  の Milnor  $K$  群と  $F$  の Galois コホモロジーを「Galois 記号写像」という写像で関係づけ、この写像が同型であろうという予想を提唱した。この予想の特別な場合が「Hilbert 90」と呼ばれる定理や「Merkurjev-Suslin の定理」と呼ばれる大定理に他ならない。この予想は多くの数学者の寄与もあって最終的に Voevodsky-Rost, Weibel 等によって証明された。高次元類体論、岩澤理論といった数論への直接的応用もさることながら、証明の課程で混合モチーフ理論という大道具が整備され、数論幾何・代数的トポロジーに大きな影響を与えたことでよく知られている。(この寄与により Bloch-加藤予想が完全に解決される前であったにも関わらず、2002 年に Voevodsky へ Fields 賞が与えられている。)

一方、加藤と染川は体  $F$  の Milnor  $K$  群を一般化した  $F$  上の準 Abel 多様体に付随する Milnor 型  $K$  群(今では染川  $K$  群と呼ばれる群)を定義した。この群に対しても、上記の Bloch-加藤予想の類似の予想があり、**加藤-染川予想**と呼ばれている。これは、染川  $K$  群から Galois コホモロジー群への Galois 記号写像が単射である、という予想である。しかし、この予想は一般の準 Abel 多様体に対しては成立しないことが知られている(下記参考論文(1))。そこで、どのような準 Abel 多様体に対してこの予想が成立するかを調べることも重要になってくる。

### 参考論文

- (1) T. Yamazaki and M. Spiess, A counterexample to generalizations of the Milnor-Bloch-Kato conjecture. *Journal of K-theory*, 4, No. 1, 77-90 (2009)

## 2. 研究の目的

- (1) 加藤-染川予想を特別な場合に証明すること、特に、局所体上の楕円曲線の場合を考察する。
- (2) 局所体上の曲線に対する類体論を考察する。特に正標数の局所体の場合に、相互写像の核と余核を決定するという問題を考える。標数 0 の場合、すなわち  $p$  進体上では、曲線に限らず高次元の多様体に関しても多くの結果が知られているが、正標数の場合は暴分岐が出てくる分難しく、まだ分かっていないことも多い。
- (3) 本研究課題の眼目である加藤-染川予想の応用として、楕円曲線の積の Chow 群の構造を調べたり、局所体上の曲線に対する類体論への応用を調べたりする。

## 3. 研究の方法

- (1) (研究開始当初にはほとんど完成していた) 発表論文において、加法群のような、ユニポテント部分を含むような可換代数群に対しても、Milnor 型  $K$  群を定義できることが分かった。この結果と、B. Kahn 氏による有限体上の曲線の積に対する不分岐類体論(の拡張)をあわせて用いることで、有限体上の曲線の分岐を制限した基本群や Chow 群の有限性を調べた。
- (2) 平成 27 年度に東京へ長期滞在をし、東京工業大学の田口雄一郎氏・原田新也氏と、主に分岐制限付き基本群の Hermite-Minkowski 型有限性について、中央大学の望月哲史氏と加藤-染川予想の混合モチーフ論的な側面から考察することについて、東京電機大学の杉山倫氏とは主に染川  $K$  群とその一般化について、千葉大学の津嶋貴弘氏とは有限体上の多様体の 1 進層について、集中的に研究打ち合わせを行った。
- (3) 計算機ソフトウェア SAGE を用いて、具体的にどのような有理数体上の楕円曲線楕円曲線に対して素数  $p$  冪等分点に付随する類数の下限に関する定理を適用できるのかを具体的に列挙した。

## 4. 研究成果

- (1) 局所体上の楕円曲線に対する Galois 記号写像について研究した。より具体的には、ふたつの楕円曲線のうちひとつは good ordinary reduction を持つと仮定し、対象となる基礎体が十分大きいときに、加藤-染川予想が成り立つ、つまり Galois 記号写像が単射であることを示した。応用として、サイクル写像を用いることで楕円曲線の積に対する Chow 群の構造を決定することができた。
- (2) 局所体上の(開)曲線に対する類体論の研究を行った。イデール類群と相互写像を定義し、この写像の核と余核を決定した。さらに、古典的な類体論(有限体上の曲線に対する類体論)と同じように開曲線上の Abel 被覆とイデール類群の開部分群が一对一対応していることもわかった。また古典的なレイ類体論(モジュラス付きの類体論)の類似として、曲線上に与えられた Weil 因子の分だけ分岐を制限したイデール類群と基本群を定義し、その相互写像についても考察した。これらの結果については、論文を作成して投稿したが、投稿先の手違いがあったため査読が遅れ、まだ出版には至っていない(下記参考文献(2))。また、本研究課題の加藤-染川予想を用いてこの類体論における「類数」にあたるイデール類群の有限部分群の位数を計算する方法が

分かった。

- (3) G. Wiesend の類体論で用いられたアイデアを元に、分岐制限付き基本群を定義した。Deligne による分岐を制限した 1 進層の有限性から、この基本群の有限性を得ることができ、関数体版の Hermite-Minkowski 型有限性の高次元化を得ることができた。また基本群の表現の有限性とこうした Hermite-Minkowski 型の有限性の間の関係も明らかにすることができた。また Kerz-斎藤による分岐制限付き (Abel) 基本群との比較を行うことによって、分岐制限付き基本群の Abel 化の有限性も得ることができた。こうした結果を纏めた論文が、J. Number Theory に受理・出版された。
- (4) 有理数体上の楕円曲線の素数  $p$  冪等分点に付随する類数のある種の下限を、西来路-山内は、 $p$  で乗法的還元をもつ楕円曲線の場合に与えた。今回、local non-torsion prime という素数に注目することで、従来よりも広範囲な楕円曲線に対して、より簡潔になった証明を与えることができた。こうした結果に関して論文を作成し、現在プレプリントサーバー arXiv にて公開中(下記参考文献(1))である。

#### 参考文献 (プレプリント)

- (1) T. Hiranouchi, Local torsion primes and the class numbers associated to an elliptic curve over  $\mathbb{Q}$ , arXiv:1703.08275 [math.NT]
- (2) T. Hiranouchi, Class field theory for open curves over local fields, arXiv:1412.6888

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

#### 〔雑誌論文〕(計4件)

T. Hiranouchi, A Hermite-Minkowski type theorem of varieties over finite fields, J. Number Theory, 176 (2017) 473-499.

T. Hiranouchi, Milnor K-groups attached to elliptic curves over a  $p$ -adic field, Functiones et Approximatio, 54 (2016), 39--55.

T. Hiranouchi, Finiteness of certain products of algebraic groups over a finite field, RIMS kokyuroku Bessatsu, B51 (2014), 3--14.

T. Hiranouchi, An additive variant of Somekawa's K-groups and Kaehler differentials, J. of K-theory, (2014) no. 3, 481-516.

#### 〔学会発表〕(計4件)

T. Hiranouchi, A Hermite-Minkowski type theorem of function fields over finite fields, 仙台広島整数論集会, 2016年7月15日

T. Hiranouchi, Class field theory of curves over local fields, EANTC, Elysian resort 春川 (韓国), 2015年8月24日

T. Hiranouchi, 局所体上の曲線の類体論, 第2回岡山-広島代数学シンポジウム, 広島大学, 2015年3月27日

T. Hiranouchi, Computations of K-groups of reciprocity functors, Workshop on reciprocity sheaves, Yatsugatake Natural and Culture Park, 2013年7月13日

#### 〔図書〕(計0件)

#### 〔産業財産権〕

出願状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

#### 〔その他〕

ホームページ等

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/hira/publications.html>

ただし、研究代表者の移動に伴い、上記ホームページは移転する予定。

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

平之内 俊郎 (HIRANOUCHI, Toshiro)

広島大学・理学研究科・助教

研究者番号: 30532551

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者 ( )

研究者番号：

(4)研究協力者 ( )