

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：15501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2014

課題番号：25800020

研究課題名(和文) ヒルベルト函数解析を手法とした局所環論

研究課題名(英文) Research on the Hilbert functions in local rings

研究代表者

大関 一秀(OZEKI, Kazuho)

山口大学・理工学研究科・講師

研究者番号：70445849

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、ヒルベルト函数の理論を積極的に用いてネーター局所環内のイデアルの構造を分類することを目的としている。本研究では、主に、次の2つの研究成果を与えた。

1. W. V. Vasconcelos氏によって定義された加群上のホモロジカル次数の概念を用いて、ネーター局所環上の有限生成加群に於ける巴系イデアルの第1オイラー標数や第1, 第2ヒルベルト係数の無駄のない境界を与えた。
2. コーエン・マコレイ局所環内に於ける階数が3以下の極大イデアルに関するSally加群の構造を完全に決定した。その際に、M. V. Pintoによって定義されたSally加群のフィルトレーションの理論を用いた。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to explore the behavior of the Hilbert functions of ideals in a commutative Noetherian local ring. The representative of this research gave the following results.

1. Research on the Hilbert coefficients of parameter ideals: The purpose of this research is to explore the relationship between the first Euler characteristics and the homological degrees of modules. We also investigate the first and the second Hilbert coefficients of parameters in connection with the homological torsions of modules.
2. Research on the structure of the Sally modules: The purpose of this research is to study the structure of the Sally module of maximal ideal with rank at most three in a Cohen-Macaulay local ring.

研究分野：代数学

キーワード：可換環論 ヒルベルト函数 ヒルベルト係数 Sally加群 コーエン・マコレイ環 ブックスバウム環

1. 研究開始当初の背景

局所環内のイデアルのヒルベルト函数の挙動研究が本格的に開始されたのは約50年前のことであり、主に重複度研究を軸に急速に発展した。その後間もなく、その主要な部分はほぼ完成し、とりわけ巴系イデアルのヒルベルト函数については自明であると考えられてきた。しかしながら、2008年に W. V. Vasconcelos 氏が提唱した巴系イデアルの第1ヒルベルト係数の消滅性と局所環のコーエン・マコーレイ性に関する予想によって、その重要性が再認識された。

本研究開始時に、研究代表者は、ネーター局所環内の巴系イデアルのヒルベルト函数の挙動研究に従事し、巴系イデアルの第1ヒルベルト係数による局所環の構造の特徴づけを与えていた。特に、巴系イデアルの第1ヒルベルト係数の消滅性や定常性、さらに、有限性によって、ネーター局所環のコーエン・マコーレイ性やブックスバウム性、FLC性を与えていた。これらの一連の研究を考察するに、巴系イデアルのヒルベルト函数の挙動には局所環の構造の主要な部分が含まれていると考えられる。このことから、巴系イデアルのヒルベルト函数の挙動解析が、局所環の構造の分類に於いて重要であると考えられる。しかしながら、巴系イデアルの各ヒルベルト係数の値は、局所環が FLC を持つ場合には局所コホモロジー量によって一様な境界を与えることが出来るが、より一般のネーター局所環の場合には制御を行う方法は僅かであった。

本研究代表者は、巴系イデアルに限定せず、一般の m -準素イデアルのヒルベルト函数の挙動研究も行っている。

コーエン・マコーレイ局所環 (A, m) 内に於ける m -準素イデアルのヒルベルト函数の挙動研究は、約30年前に Northcott によって与えられた第1ヒルベルト係数に関する不等式を巡り、多くの研究者によって盛んな議論が行われ、現在も数多くの関連論文が発表されている。

第1ヒルベルト係数を制御する際には、W. V. Vasconcelos 氏によって提唱された Sally 加群の理論が有効であると考えられている。Sally 加群は、「そのヒルベルト函数がイデアルのヒルベルト函数の補正項をなす」、「随伴次数環のコホモロジー量の評価が可能である」など、イデアルの情報の主要な部分を内包する加群である。本研究開始時には、後藤四郎氏、西田康二氏と本研究代表者の共同研究によって、階数が1の Sally 加群の構造について、完全な構造解析が行われていた。しかしながら、階数が2以上の場合については、M. E. Rossi 氏によって与えられた部分的な解答を除

けば未知なものであり、小さい階数を持つ Sally 加群の構造説明が研究課題として挙げられていた。

2. 研究の目的

本研究は、代数学の中の可換環論の発展を目的とするものである。特に、ネーター局所環の構造の分類を行うものである。

与えられたネーター局所環の構造は、そこに含まれる極大イデアル m や m -準素イデアルの構造に反映されていると考えられ、それらの構造の分類が鍵となる。そして、 m -準素イデアルの構造を分類する際に、ヒルベルト函数の理論が有効であると考えられる。本研究では、ヒルベルト函数の理論を積極的に用いながら、ネーター局所環内に含まれる m -準素イデアルの構造を分類し、それによって、ネーター局所環の構造の特徴付けを行うことを目標とする。

巴系イデアルは、 m -準素イデアルの中でも、それらを含む局所環の構造を強く反映していると考えられている。このことから、そのヒルベルト函数の挙動によるネーター局所環の構造の分類が期待できる。

本研究では、特に、巴系イデアルの第1オイラー標数と、第1、第2ヒルベルト係数について、その挙動を精密に解析することを目的とする。

巴系イデアルのヒルベルト函数には、その特殊性が顕著に表れることから、巴系の場合とは別に、一般の m -準素イデアルのヒルベルト函数の挙動解析を行う必要があると考えられる。

特に、 m -準素イデアルの第1ヒルベルト係数の値にはイデアルのヒルベルト函数の挙動や、随伴次数環の構造に関する情報が豊富に内包されていると考えられる。このことから、本研究では、第1ヒルベルト係数の挙動に注目し、 m -イデアルの分類を行うことを目標とする。

3. 研究の方法

巴系イデアルのヒルベルト函数の挙動を制御する際に、W. V. Vasconcelos 氏によって導入された、加群上のホモロジカル次数の理論を用いた。ホモロジカル次数の値によって、各ヒルベルト係数の値を表現することにより、一般のネーター局所環上の有限生成加群という枠組みの中でヒルベルト函数の挙動研究が展開可能となった。特に、巴系イデアルの第1オイラー標数と第1、第2ヒルベルト係数の挙動解析に重点を置いた。この研究課題については、明治大学の後藤四郎氏との共同研究として取り組んだ。

「1. 研究開始当初の背景」にて述べた通り, m -準素イデアルの第1ヒルベルト係数の解析を行う際には, Sally 加群の理論が有効であると考えられている。本研究代表者は, 後藤四郎氏, 西田康二氏と共に Sally 加群の基本構造を構築し, 階数が1の Sally 加群の構造の決定を行っている。本研究では, その際に得られた理論と技術を基盤に, 階数が小さい Sally 加群の構造の決定を行うことを目標とする。この研究課題については, ジェノバ大学(イタリア)の M. E. Rossi 氏からの助言が問題解決に有効であると考えられたことから, 同氏との共同研究として取り組んだ。

4. 研究成果

ネーター局所環上の有限生成加群の巴系イデアルについて, ホモロジカル次数による第1オイラー標数の上限値を与えた。さらに, その上限値に達するような巴系イデアルの特徴付けと具体例を与えている。

巴系イデアルの第1ヒルベルト係数は一般に非負であることが Mandal-Verma によって示されていた。これに対して, 本研究では, ホモロジカル次数による巴系イデアルの第1ヒルベルト係数の下限値を与えた。また, 非混合的な加群上の巴系イデアルについて, 第1ヒルベルト係数が下限値をとることと, 第1オイラー標数が上限値をとることが同値であることを証明した。さらに, 第2ヒルベルト係数についてもホモロジカル次数による境界値と, その特徴付けを具体例と共に与えている。

これら一連の研究成果については, 「5. 主な発表論文等」の[学会発表]欄の ~にて口頭発表を行い, [雑誌論文]欄の ~として公表した。

ジェノバ大学(イタリア)の M. E. Rossi 氏と共に, コーエン・マコーレイ局所環内に於ける極大イデアルに関する Sally 加群の構造解析に取り組んだ。

「1. 研究開始当初の背景」にて述べた通り, それまでは, Sally 加群の階数が2以上の場合にはその構造は未知であった。それに対して, M. V. Pinto 氏によって定義された, Sally 加群のフィルトレーションの理論を用いることで, 階数が3以下の極大イデアルに関する Sally 加群の構造を完全に決定することが出来た。

この研究成果については, 現在, 学術論文として執筆中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Shiro Goto and Kazuho Ozeki, The

second Hilbert coefficients and the homological torsions of parameters, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 査読有, 219, pp.1685-1703, 2015.

L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, The Chern and Euler coefficients of modules, *Acta Mathematica Vietnamica*, 査読有, 40, pp.37-60, 2015.

Shiro Goto and Kazuho Ozeki, The first Euler characteristics versus the homological degrees, *Bulletin Brazil Mathematical Society*, 査読有, 45 (4), pp.679-709, 2014.

S. Goto, K. Ozeki, R. Takahashi, K. Watanabe, and K. Yoshida, Ulrich ideals and modules, *Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 査読有, 156, pp.137-166, 2014.

Kazuho Ozeki, The structure of Sally modules and Buchsbaumness of associated graded rings, *Nagoya Mathematical Journal*, 査読有, 212, pp.97-138, 2013.

[学会発表](計5件)

Shiro Goto and Kazuho Ozeki, The sectional genera and the second Hilbert coefficients of parameter ideals, The 36th Symposium on Commutative Algebra in Japan, IPC 生産性国際交流センター(神奈川県葉山市), 2014年11月23日.

後藤四郎, 大関一秀, 巴系イデアルの第1オイラー標数とホモロジカル次数について, 日本数学会 2014 年度年会, 学習院大学(東京都豊島区), 2014年3月15日.

後藤四郎, 大関一秀, 巴系イデアルの第1ヒルベルト係数とホモロジカルトーシオンについて, 日本数学会 2014 年度年会, 学習院大学 (東京都豊島区), 2014 年 3 月 15 日.

Kazuho Ozeki, The first Euler characteristics versus the homological degrees, Commutative Algebra and its intersection to Algebraic Geometry and Combinatorics, Institute of Mathematics -Hanoi and VISAM(ベトナム・ハノイ), 2013 年 12 月 20 日.

Kazuho Ozeki and Shiro Goto, The first Euler characteristics versus the homological degrees, The 35th Symposium on Commutative Algebra in Japan, RIMS Kyoto University (京都府京都市), 2013 年 12 月 5 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大関 一秀 (OZEKI, Kazuho)
山口大学大学院・理工学研究科・講師
研究者番号: 70445849