

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：16101
 研究種目：若手研究(B)
 研究期間：2013～2016
 課題番号：25800021
 研究課題名(和文) ケッヒャー・マース級数によるモジュラー形式の研究

 研究課題名(英文) Study of modular forms by Koecher-Maass series

 研究代表者
 水野 義紀 (Mizuno, Yoshinori)

 徳島大学・大学院理工学研究部・准教授

 研究者番号：30546388
 交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：1. 捻り2次対称L関数の正則核関数の公式を導き、L関数の特殊値を計算した。ある半整数アイゼンシュタイン級数ふたつから定まるL関数の特殊値を、いくつか明示的に決定した。2. 2次エルミート・カスプ形式の特徴付けを確立した。3. 種の指標付き二次整環のゼータ関数を明示的に計算し、虚二次体の類数を連分数で記述する公式を一般化した。4. 非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数に付随するケッヒャー・マース級数の解析接続・関数等式の問題が解決し、2次A₃型ワイル群多重ディリクレ級数との接点が判明した。5. 高次元双曲空間のアイゼンシュタイン級数に対するカトック・サルナック対応が得られた。

研究成果の概要(英文)：1. We study a kernel function of the twisted symmetric square L-function of elliptic modular forms, and compute several exact special values of the L-function. We also succeed to determine some special values of the convolution product of two Eisenstein series of half-integral weight. 2. We give a characterization of degree 2 Hermitian cusp forms by the growth of their Fourier coefficients. 3. We give an explicit form of genus character L-functions. As an application, we generalize the formula due to Hirzebruch-Zagier on the class number of imaginary quadratic fields in term of the continued fraction expansion. 4. We give analytic properties of the Koecher-Maass series of non-holomorphic Siegel-Eisenstein series. It turned out that the series has a relation with Weyl group multiple Dirichlet series. 5. Katok-Sarnak type result for the Eisenstein series on higher dimensional hyperbolic space is established.

研究分野：数学・代数学

 キーワード：ケッヒャー・マース級数 L関数 アイゼンシュタイン級数 モジュラー形式 カトック・サルナック
 対応 特殊値

1. 研究開始当初の背景

モジュラー形式と関連するディリクレ級数は、積分変換・オイラー積（ヘッケ作用素）を通して、結びついている。ディリクレ級数の解析的性質、その特殊点での値・特殊点での留数は、お互いに補完する形で、重要な興味ある情報を様々に握っている。特にメルン変換による結びつきは直接的である。モジュラー形式にメルン変換を通して付随するディリクレ級数のひとつに、ケッヒャー・マース級数と呼ばれるものがある。一般にはオイラー積を持たないので、主流のゼータ関数とは言えない点もあるのであるが、それ自身固有の内容を持っている。報告者は研究開始当初の時点で、ケッヒャー・マース級数およびアイゼンシュタイン級数を中心として、ケッヒャー・マース級数特有の、モジュラー形式への応用を踏まえた、独特な成果を挙げてきていた。それらは、解析的方法を軸にしているものの、その成果は明示的な算術的内容を含む興味あるものである。その過程において、さらに検討し、深めるべき着想、実行すべき着想を少なからず得ていた。

2. 研究の目的

上述した様に、モジュラー形式に付随するディリクレ級数のひとつに、ケッヒャー・マース級数と呼ばれるものがある。本研究の目的は、ケッヒャー・マース級数を中心に、モジュラー形式と付随するL関数を調べることにある。報告者のこれまでの研究で、いくつかの予期せぬ応用や現象が見つかりつつある。これらを深め発展させることにより、ケッヒャー・マース級数の有用性を浮き彫りにすることを目的とする。さらに、他研究者による研究対象との共有点を深めることで、相互発展的にこれら興味あるディリクレ級数に広がり求め、新たな問題提起を模索することも目的とする。より具体的には、

- (1) 目的1：ヘッケ評価によるカスプ形式の特徴づけを深めること
- (2) 目的2：2元2次形式の類数を係数に持つディリクレ級数の解析的性質を探索すること
- (3) 目的3：モジュラー形式に付随するL関数の特殊値について、その値を明示的に計算すること、新現象の開拓を行うこと

3. 研究の方法

上記すべてについて、申請者の着想・既に得ている結果・原型・手法を拡張することが主な研究方法に挙げられる。新たな手法・概念

の応用なども念頭に入れて取り組む。

4. 研究成果

(1) 目的1について：

まず第一に、フーリエ係数がヘッケ評価を満たす2次ジーゲル・モジュラー形式は自動的にカスプ形式になる、というカスプ形式特徴付けの研究論文 "On characterization of Siegel cusp forms of degree 2 by the Hecke bound" の改訂作業を行った。これは雑誌 *Mathematika* に受理され、掲載が決まった。この結果をエルミート・モジュラー形式に拡張することが出来た。すなわち、フーリエ係数がヘッケ評価を満たす2次エルミート・モジュラー形式は自動的にカスプ形式になることを証明した (Roland Matthes との共同研究)。得られた研究成果を論文にまとめる作業も行った。

(2) 目的2について：

3変数ディリクレ級数と非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数に付随するケッヒャー・マース級数に関して、以下に述べる成果が得られた。考察した3変数ディリクレ級数は、2次L関数2つの積をディリクレ係数にもつ。2次L関数2つから2変数が現れ、これらを係数にもつディリクレ級数を作ることと普通の意味での1変数が加わるため、併せて3変数となる。この特殊化として、2元2次形式の類数を係数に持つディリクレ級数が現れる。また、非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数に付随するケッヒャー・マース級数の明示式が伊吹山・桂田により得られていたのであるが、その明示式の非自明因子として、この3変数ディリクレ級数の特殊化が現れる。これらを動機として、この3変数ディリクレ級数を研究し、その解析接続と関数等式を導くことに成功した。結果として、3変数の適当な特殊化により、報告者の以前の結果を直ちに導くことが出来ること、次数3以上・偶数重さ非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数に付随するケッヒャー・マース級数の解析的性質が導けることを示した。次数2・偶数重さの場合は例外的取り扱いを必要とするため部分的な結果を得るに留まっていたのであるが、本研究成果の応用として、3変数のうちのひとつの変数に注目し、その極におけるローラン展開の定数項としてケッヒャー・マース級数の主要部を取り出し、この主要部が解析接続・関数等式を持つような正しい修正項を見出すことに成功した。ハンス・マースが提示した問題、すなわち非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数に付随するケッヒャー・マース級数の解析接続・関数等式の問題が、明示式のアプローチ

からは完成したことになる。
これらについて京都大学数理解析研究所集
会「モジュラー形式と保型表現」および名古屋
大学での「第8回ゼータ若手研究集会」等
において口頭発表を行った。
さらなる成果として、異なる文脈に由来する
対象との関係も見出された。Jun Wen の結果
を踏まえることにより、3変数ディリクレ級
数(次数2非正則ジーゲル・アイゼンシュタ
イン級数に付随するケッヒャー・マース級
数)と、2次 A_3 型ワイル群多重ディリクレ級
数との接点が判明した。それぞれ異なる文脈
に由来する対象であるが、概ね同じ級数表示
を持つこととなった。この点については、さ
らに検討する予定である。得られた結果の論
文作成も行った。

また、高次元双曲空間のアイゼンシュタイン
級数に対するカトック・サルナック対応が得
られた。高次元双曲空間の非正則アイゼンシュ
タイン級数の CM 点平均・周期積分からでき
る数列は、非正則・行列指数のヤコビ・アイ
ゼンシュタイン級数から得られるマース形
式のフーリエ係数であることが分かった。こ
れと関連して、Peter・上野の非退化二次形
式に付随する2変数ディリクレ級数は、非退
化二次形式が正定値なら、非正則・行列指数
のヤコビ・アイゼンシュタイン級数のメリン
変換とみなせることを示した。この事実を利用
して、彼らがそれぞれ別々の方法で証明して
いた2変数ディリクレ級数の解析的性質
の保型形式による証明を与えた。「行列指数
のヤコビ・アイゼンシュタイン級数に付随す
る2変数ディリクレ級数」と題して京都大学
「数論合同セミナー」と早稲田大学「概均質
セミナー」で口頭発表し、「Dirichlet series
of two variables arising from real
analytic Jacobi-Eisenstein series of
matrix index」と題して名古屋大学「Zeta
Functions of Several Variables and
Applications」で口頭発表した。また、九州
大学「School on Mock Modular Forms and
Related Topics」において「Katak-Sarnak
type result for Eisenstein series on
 $O(1, m+1)$ 」と題する口頭発表を行った。得ら
れた研究成果を論文にまとめることも行っ
た。

(3) 目的3について：

ランキン・セルバーグ畳み込みの特殊値の研
究を行い、次の成果が得られた。奇素数導手
をもつ偶指標による捻り2次対称L関数の
正則核関数が、報告者のこれまでの成果によ
り明示的に得られていた。本研究において、
奇素数導手の指標による捻りを、平方因子を
含まない奇素数導手をもつ指標による捻りへ
と一般化し、捻り2次対称L関数の正則核関
数の公式を導いた。自明指標を扱ったザギ

エ・水本の公式、素数導手ルジャンドル偶指
標を扱ったストップルの公式の一般化にな
っている。偶指標でも奇指標でも適用可能な
ように拡張出来ていることは、特に新しい点
である。これらの利点は、L関数の特殊値計
算にあたって、導手が大きくなるにつれて考
察すべき空間が複雑になるという困難が避
けられる点にある。初等的な計算は増えてし
まうのであるが、計算可能であるところに
注目すべき点があり、実際にいくつかの値を
明示的に算出した。

素数導手の場合について、上越教育大学
「Workshop on Modular forms and Jacobi
forms」、京都大学「第2回京都保型形式研
究集会」、九州大学「第8回福岡数論研究集
会」において、それぞれ口頭発表を行った。
また、第8回福岡数論研究集会報告集の原稿
を作成した。加えて、自明指標の場合を埼玉
大学における集中講義で取り上げ、報告者の
アプローチをフーリエ展開および解析的正
当化に力を入れて解説した。この内容を論じ
た論文 "Kernel functions of the twisted
symmetric square of elliptic modular
forms" を作成し、投稿の後、好意的な査読
報告を受け、現在、再改訂・最終確認の段階
である。(小浜隼氏との共著論文)

さらに、次の様な成果も得ることが出来た。
すなわち、ケッヒャー・マース級数の理論を
応用して、ある半整数アイゼンシュタイン級
数ふたつから定まるランキン・セルバーグ畳
み込みの特殊値を、いくつか明示的に決定す
ることが出来た。どちらか一方がカスプ形式
の場合には、志村氏の定性的結果が知られて
いる。この結果と比較して、検討を要する興
味有る成果であると思われる。例えば、カス
プ形式の場合、ピーターソン内積等で割るこ
とにより特殊値の代数性が従うが、アイゼン
シュタイン級数の場合、ピーターソン内積に
は適切な解釈(正規化)が必要となる。この様
な点について、新たな課題をも得ることが出
来た。

また、目的1・目的2から派生して、種の指
標付き二次整環のゼータ関数を明示的に計
算した。二次整環のゼータ関数の明示公式は
金子昌信氏や Zagier により得られていた
が、種の指標付きに拡張したのが新しい点で
ある。GL(3)アイゼンシュタイン級数の周期
の計算に Chinta と Offen が用いた公式の一
般化にもなっている。

応用として、虚二次体の類数を連分数で記述
する Hirzebruch-Zagier の公式を一般化し、
また金子昌信氏に教示頂いた関連する予想
も解決した。さらに、K. Williams 達によ
る、固定した種の中の類をわたる二元二次形
式から定まる、表現数のディリクレ級数の明
示式を再導出することにもつながった。目的
1を念頭とした、バイサウアーの逆定理及び

GL(3)アイゼンシュタイン級数の周期公式の検討と関連して、また目的2の2元2次形式の類数と関連して考察するに至ったものであるが、予期しない成果であった。得られた成果を論文にまとめ、プレプリントの作成も行った。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Yoshinori Mizuno

On characterization of Siegel cusp forms of degree 2 by the Hecke bound, *Mathematika*, Vol.61, pp.89--100, 2015 年 (査読有り)

水野義紀

Dirichlet series of 3 variables and Koecher-Maass series of non-holomorphic Siegel-Eisenstein series, 京都大学数理解析研究所講義録 No. 1973 「モジュラー形式と保型表現」 pp.76--91, 2015 年(査読なし)

水野義紀

Kernels of twisted symmetric square of elliptic modular forms, 「第8回福岡数論研究会報告集」 pp. 57-69, 2014 年 (査読なし)
<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ykishi/FSNT/13/reports.html>

[学会発表](計 10 件)

Yoshinori Mizuno

Katok-Sarnak type result for Eisenstein series on $O(1, m+1)$, 「School on Mock Modular Forms and Related Topics」 2016 年 11 月 21 日--25 日, 九州大学 百道分室(福岡県福岡市)

水野義紀

Dirichlet series of two variables arising from real analytic Jacobi-Eisenstein series of matrix index, 「Zeta Functions of Several Variables and Applications」 Nov. 9 -- 13, 2015, Nagoya University (愛知県名古屋市)

水野義紀

行列指数のヤコビ・アイゼンシュタイン級数に付随する2変数ディリクレ級数, 「概均質セミナー」 2015 年 10 月 24 日(土) 14:00-17:00 早稲田大学 14 号館 717A 室(東京都新宿区)

水野義紀

行列指数のヤコビ・アイゼンシュタイン級数に付随する2変数ディリクレ級数, 「数論合同セミナー」 2015 年 10 月 9 日(金) 13:30~14:30 京都大学理学部 3 号館 152 室(京都府京都市)

水野義紀

Dirichlet series of 3 variables and Koecher-Maass series of non-holomorphic Siegel-Eisenstein series, 「神戸整数論三二集会」 2015 年 5 月 21 日--22 日, 神戸大学(兵庫県神戸市)

水野義紀

3変数ディリクレ級数と非正則ジューゲル・アイゼンシュタイン級数のケッヒャー・マース級数, 「第8回ゼータ若手研究集会」 2015 年 2 月 13 日--16 日, 名古屋大学 (愛知県名古屋市)

水野義紀

Dirichlet series of 3 variables and Koecher-Maass series of non-holomorphic Siegel-Eisenstein series, 京都大学数理解析研究所集会「モジュラー形式と保型表現」 2015 年 2 月 2 日--6 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

水野義紀

Kernel of twisted symmetric square of elliptic modular forms, 「第8回福岡数論研究会」 2013 年 8 月 8 日--10 日, 九州大学 (福岡県福岡市)

水野義紀

Kernel of twisted symmetric square of elliptic modular forms, 「第2回京都保型形式研究集会」 2013 年 6 月 14 日--16 日, 京都大学 (京都府京都市)

水野義紀

Kernel of twisted symmetric square of elliptic modular forms, 「Workshop on Modular forms and Jacobi forms」 2013 年 6 月 11 日--12 日, 上越教育大学 (新潟県上越市)

[その他]

ホームページ等

徳島大学/研究教育者総覧---水野義紀

<http://pub2.db.tokushima-u.ac.jp/ERD/person/186508/profile-ja.html>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

水野 義紀 (MIZUNO, YOSHINORI)
徳島大学・大学院理工学研究部・准教授
研究者番号：30546388