

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：17701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800022

研究課題名(和文)代数諸分野における圏論とその応用

研究課題名(英文)Category theory appearing in algebra and its applications

研究代表者

中岡 宏行 (NAKAOKA, HIROYUKI)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：90568677

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：(1)三角圏上の双余ねじれ対はt-構造・クラスター傾部分圏・functorially finite rigid部分圏を包括する概念である。双余ねじれ対のハートが同値になるための条件を、付随する関手を用いて与えた。

(2)群が特殊な場合にBurnside-丹原関手の素スペクトラムの計算を行った。また、biset変形を丹原関手に対して与えた。

Biset関手がある種の2-圏上の特別なMackey関手として実現した。Burnside環のなすbiset関手のもつ乗法的構造射の性質を記述し、「部分的丹原性」を明らかにした。さらに、有限圏のなす2-圏上のderivatorからbiset関手を得る方法を与えた。

研究成果の概要(英文)：(1)Twin cotorsion pair on a triangulated category gives a simultaneous generalization of t-structure, cluster tilting subcategory and functorially finite rigid subcategory. We have given a condition for the heart of twin cotorsion pairs to be equivalent, by means of the associated functors.

(2)We have calculated the prime spectrum of the Burnside Tambara functor for a special kind of groups, and related it to the spectrum of the Burnside ring itself. We have also given a biset deformation of Tambara functors, which was known to Mackey functors.

We have shown that biset functors can be realized as a special kind of Mackey functors on a 2-category. Based on this result, describing the properties of multiplicative transfers of Burnside rings, we have revealed their 'partial Tambara' property. Besides, via the 2-category of finite groupoids, we have given a method to obtain a biset functor from a derivator on this 2-category.

研究分野：代数学における圏論

キーワード：三角圏 完全圏 biset関手 Mackey関手 Burnside環

1. 研究開始当初の背景

(1) [三角圏上のホモロジカルな構造について] 圏論、特にホモロジー代数は代数分野で広く用いられるが、古典的にはアーベル圏が、その拡張として完全圏が、また近年では三角圏が重要な枠組みである。

三角圏は導来圏・安定圏あるいはクラスター圏という形で代数幾何学・環論・表現論などに分野横断的に現れ、各分野において有用な道具としても、またそれ自体興味深い対象としても考察されている。

三角圏における構造として、 t -構造・クラスター傾部分圏・変異対・ルコルマンといった諸概念とそこから生じる新たな圏について、様々な研究者によって調べられている。本研究の研究者自身も、クラスター傾部分圏による剰余と t -構造の heart の同時一般化をねじれ対を用いて与えるなど、関連する三角圏での研究を行っていた。

(2) [有限群に関連する圏と関手について] Mackey 関手は、有限群の作用する集合(群を G とするときの、有限 G -集合) のなす圏上で定義される概念であり、表現環や Burnside 環、コホモロジー環等のもつ、 G の部分群の間の induction, restriction, conjugation といった構造射を一般的に扱う道具である。また、 G の部分群だけでなく任意の有限群まで同時に扱うものは大域的 Mackey 関手とよばれ、さらに、部分群の間の関係だけでなく剰余に付随する inflation, deflation にまで考察の対象を広げた新たな概念として、近年では biset 関手が研究されている。これは biset 圏上の加法関手として定義され、その理論は Serge Bouc 教授により整備がなされた。

Biset 関手を用いることで、有限群に付随する代数系の restriction, induction, conjugation, inflation, deflation といった一連の操作を包括的に扱うことが出来る。Biset 圏は、有限群の p -局所的な解析で用いられる圏 'fusion system' と関係しているが、さらにより多くの射をもつ圏である。本研究の研究者自身も、有限群・プロ有限群上の Mackey 関手のなす圏の一般論について研究を行っており、また、丹原関手と biset 変形との関わりを調べてきた。

2. 研究の目的

(1) 代数幾何学や表現論など、代数諸分野で現れるホモロジカルな概念を、一般の三角圏上で抽象的に扱うことを目的とする。本研究では、クラスター圏・導来圏・安定圏といった種々の三角圏に現れるホモロジカルな構造のもつ性質を一般の三角圏上でうまく定式化し、純圏論的にそれらの相互関係の解析を行う。また こうした概念の相互作用を調べ、それらのなす関係を明らかにすることを目的とする。

特に、本研究で扱う主要概念のひとつが「余ねじれ対」(cotorsion pair)である。余

ねじれ対はアーベル圏・完全圏や三角圏で定義される概念であり、特に三角圏においては t -構造・クラスター傾部分圏・余 t -構造の同時一般化を与える。さらに、余ねじれ対のペアである「双余ねじれ対」(twin cotorsion pair)を考えることで、functorially finite rigid 部分圏も扱うことができ、さらに変異対と関係づけることも可能になる。本研究では、(双)余ねじれ対の考察により、様々な概念に適用可能な形で一般論の展開を目指す。

(2) 有限群 G 上の Mackey 関手の中でも、「1. 研究開始当初の背景」で例に挙げた表現環関手・Burnside 関手・コホモロジー環関手などは、さらに部分群の包含に付随する乗法的構造射(multiplicative transfer)をもつ特徴的なものである。このような乗法的推移射をもつ Mackey 関手のうち、分配則に相当する条件を満たすものは丹原関手と呼ばれる。Mackey 関手を Abel 群の G -同変版とみなすとき、丹原関手は可換環の G -同変版に相当する概念である。

これまでも丹原関手に対し、イデアル剰余・準同型定理・分数環・多項式環・素スペクトラムをとるといった一連の基本的操作を定式化し、「可換環論の G 両変関手版」を与える研究を行ってきた。その一環として丹原関手の biset 変形に関する結果が得られたが、これは良い biset 関手が丹原性と相性のよいことを示唆している。

本研究ではこの発見をさらに推進し、乗法的推移射をもつ biset 関手が有し得る「丹原関手性」について詳しく調べることを目的とする。例えば biset 関手の中には、通常の Burnside 環の亜種として double Burnside 環、slice Burnside 環、section Burnside 環など、環構造を有する重要な例からくる関手がいくつか存在する。有限群上の Mackey 関手との類似を考えれば、これらの環構造の背景には「丹原関手的」な性質が隠れていると期待される。実際に double Burnside 関手などは乗法的ノルム射に相当する写像を有しており、こうしたノルム射の性質を調べることで、biset 関手の持つ「丹原性」を適切に定式化することが出来ると考えられる。本研究では、biset 関手の乗法的推移射を扱う一般的な枠組みを得ることを目的とする。

3. 研究の方法

(1) [三角圏上のホモロジカルな構造の研究] 上記のように(双)余ねじれ対は t -構造・クラスター傾部分圏・functorially finite rigid 部分圏を包括する概念であり、これを調べることで様々な概念に適用可能な一般論が得られる。

双余ねじれ対に付随する概念として、そのハートが定義できる。これは過去に本研究の研究者により構成され、 t -構造のハートやクラスター傾部分圏による剰余を同時に一般化するものであり、余ねじれ対からアーベル

圏を得る一般的方法を与える。余ねじれ対のハートが同値になるための条件は、もとの三角圏からハートへのコホモロジカル関手を用いて簡潔に表すことができる。双余ねじれ対に対しても、同様の方法でハートが同値となるための条件を考察する。

さらに、余ねじれ対どうしの相互作用を調べることができる。三角圏では Iyama-Yoshino により導入された変異対による変異と呼ばれる操作が可能であり、これにより余ねじれ対を変形して新たな余ねじれ対を得ることが出来る。一方で、三角圏のルコルマンが与えられると、両端に現れる圏上の余ねじれ対を貼り合わせて中央の圏上の余ねじれ対を得る「貼り合わせ」操作が可能である。

変異と貼り合わせという、余ねじれ対に対する二つの操作を行う際、自然に双余ねじれ対が伴うことが観察できる。この双余ねじれ対を用いることで、これら二つの操作を同時に一般化する操作を与える。すなわち、良い双余ねじれ対が与えられたとき、「変異」あるいは「貼り合わせ」に相当する余ねじれ対の変形を一般的に考察する。双余ねじれ対はねじれ対のペアであるので、これは与えられた3つの余ねじれ対から1つの新しい余ねじれ対を与える相互作用であると思うこともできる。このように、余ねじれ対どうしの関係を調べることで研究を進める。

(2)[有限群に関連する圏と関手の研究]

Mackey 関手の定義として、同値な4つの定義が可能である。一つ目は、部分群で添え字付けられた代数系の族と構造射の集まりとして定義する「素朴な定義」である。二つ目は Dress による、 G -集合の圏上の両変関手としての定義である。三つ目は Lindner により得られた圏同値に基づくものであり、有限 G -集合の圏の-span圏上の関手として Mackey 関手を定義できる。四つ目は、Mackey 代数上の加群として定義する方法である。

本研究では丹原性の記述が大きな目標である。丹原関手は上記4つの Mackey 関手の定義のうち、2つ目の「Dress の定義」を用いた定義が最も自然である。一方で、biset 関手は1つ目の素朴な定義と Lindner による span 圏を用いる定義のハイブリッドのような方法で得られている。こうした理由から、まずは biset 関手の Dress 流の定義を与えることが、biset 関手の持つ丹原性の記述を行うための基礎になる。実際この「biset 関手の Dress 流の定義」を用意することで、Mackey 関手論の類似が biset 関手に対しても展開できることになり、乗法的推移射の考察を通して biset 関手の持つ丹原性の記述も可能となる。

さらに、研究を推進する上で、induction, reduction, multiplicative induction の3対や inflation, deflation, invariant part をとる操作の3対が随伴関手から導かれてい

る典型的な場合、Grothendieck の提唱した derivator と関係することも明らかとなった。このことも、丹原性の記述に有効に用いることができる。

4. 研究成果

論文 “The spectrum of the Burnside Tambara functor on a finite cyclic p -group” が Journal of Algebra に掲載された。有限群上の丹原関手に関する論文である。当論文では群が特殊な場合に Burnside 丹原関手の素スペクトラムの計算に成功しており、また、Burnside 環自身のスペクトラムの構造 (Dress による) との関わりについても述べている。Burnside 環のスペクトラムは Feit-Thompson の定理とも関連する対象であるため、丹原関手のスペクトラムがこれと関係付けられたことは、もとの有限群の性質を反映しているという点でも重要である。

論文 “Biset transformations of Tambara functors” が Journal of Algebra に掲載された。有限群上の丹原関手の変形に関する論文である。当論文では、Mackey 関手に対して Serge Bouc 教授により行われていた biset 変形を、丹原関手に対して実現した。この結果は、丹原関手の概念が biset と相性の良さを持つことを意味し、以降の「biset 関手の持つ『丹原性』の記述」についての研究を推進させた。

論文 “A Mackey-functor theoretic interpretation of biset functors” が Advances in Mathematics に掲載された。Biset 関手を、ある種の 2-圏上の特別な Mackey 関手として実現できることを示した論文である。これにより biset 関手の Dress 流の定義が可能となり、この定義に基づくことで、Mackey 関手論で知られた方法の 2-圏版が適用できるようになった。これは biset 関手の一般論を推進することにつながる。実際、biset 関手のもつ丹原性を記述する上で、以降の結果の基礎となった。

論文 “Partial Tambara structure on the Burnside biset functor, induced from a derivator-like system of adjoint triplets” が Journal of Algebra に掲載された。これは上記の Adv. in Math. で得た Dress 流の定義を土台にし、Burnside 環のなす biset 関手のもつ乗法的構造射の性質を記述することで、その「部分的丹原性」を明らかにした結果である。さらに、Burnside biset 関手の構造射を導く随伴3対が、derivator と類似する性質を持つことを示した。Derivator は Grothendieck に端を発する重要な概念であり、これとの関連性が伺えたことは大きい。以降の研究ではこの関連を詳しく調べることで、有限亜群の 2-圏の考察を通して、より明快な形で derivator との関連を得ている。

論文 “Equivalence of hearts of twin cotorsion pairs on triangulated

categories”が Communications in Algebra に掲載された。双余ねじれ対のハートは、本研究課題の研究者自身が三角圏上で過去に定義した概念であり、Beilinson-Bernstein-Deligne による t-構造のハート、クラスター傾部分圏による剰余、Buan-Marsh の rigid 部分圏を用いた剰余などを統一するものである。当論文では、このハートが同値になるための条件を、付随するコホモロジカル関手を用いて与えている。さらに、Marsh-Palu により導入された擬森田同値が、このハート同値の特殊な場合として得られることを示した。

論文 “Biset functors as module Mackey functors, and its relation to derivators” が Communications in Algebra に掲載された。これは上記の「部分円環性」の研究を推進して得られた結果である。当論文では、有限重群のなす 2-圏を介することで、有限圏のなす 2-圏上の derivator から biset 関手を得る方法を与えることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Hiroyuki Nakaoka, Biset functors as module Mackey functors, and its relation to derivators, Communications in Algebra, vol.44 (2016) 5105-5148. 査読有り.
DOI: 10.1080/00927872.2016.1147572

Hiroyuki Nakaoka, Equivalence of hearts of twin cotorsion pairs on triangulated categories, Communications in Algebra, vol.44 (2016) 4302-4326. 査読有り.
DOI: 10.1080/00927872.2015.1087545

Hiroyuki Nakaoka, Partial Tambara structure on the Burnside biset functor, induced from a derivator-like system of adjoint triplets, Journal of Algebra, vol. 451 (2016) 166-207. 査読有り.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2015.12.004

Hiroyuki Nakaoka, A Mackey-functor theoretic interpretation of biset functors, Advances in Mathematics, vol. 289 (2016) 603-684. 査読有り.
DOI: 10.1016/j.aim.2015.11.024

Hiroyuki Nakaoka, Biset transformations of Tambara functors, Journal of Algebra, vol. 399 (2014) 904-926. 査読有り.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.10.016

Hiroyuki Nakaoka, The spectrum of the Burnside Tambara functor on a finite cyclic p -group, Journal of Algebra, vol. 398 (2014) 21-54. 査読有り.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.09.010

[学会発表](計28件)

中岡宏行, “On the relation between cotorsion pairs and model structures on

abelian, exact, and triangulated categories”, 第7回(非)可換代数とトポロジー, 2017年2月20日~22日, 信州大学(長野県・松本市).

Hiroyuki Nakaoka, “Cotorsion pairs on exact/triangulated categories”, 第12回鹿児島代数・解析・幾何学セミナー, 2017年2月14日, 鹿児島大学理学部(鹿児島県・鹿児島市).

中岡宏行, “An interpretation of biset functors as Mackey functors on finite groupoids, and its relation to deviators”, 代数学シンポジウム, 2016年9月7日, 佐賀大学(佐賀県・佐賀市).

中岡宏行, “On Mackey functors”, 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 2016年8月29日~30日, 信州大学(長野県・松本市).

Hiroyuki Nakaoka, “Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories”, International Conference on Representations of Algebras, 2016年8月18日, Syracuse University (Syracuse (アメリカ合衆国)).

Hiroyuki Nakaoka, “Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories”, Triangulated Categories and Applications, 2016年6月20日, Banff International Research Station (Banff (カナダ)).

Hiroyuki Nakaoka, “An interpretation of biset functors as Mackey functors on finite groupoids, and its relation to derivators”, Equivariant Derived Algebraic Geometry, 2016年2月16日 Banff International Research Station (Banff (カナダ)).

Hiroyuki Nakaoka, “Toward the denition of Tambara biset functor”, Functorial Methods in Representation Theory, 2015年9月2日, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (Lausanne (スイス)).

Hiroyuki Nakaoka, “Adjoint properties on the 2-category of finite sets with variable finite group action”, Séminaire de théorie des groupes, 2015年4月8日, (Amiens (フランス)).

Hiroyuki Nakaoka, “Biset functors as Mackey functors on a 2-category, and associated system of adjoint triplets”, Séminaire Claude Chevalley, 2015年3月12日, (Paris (フランス)).

Hiroyuki Nakaoka, “A Mackey-functor interpretation of biset functors and applications”, Journée mathématique du LAMFA, Université de Picardie-Jules Verne, 2014年6月28日 (Amiens (フランス)).

6. 研究組織

(1)研究代表者

中岡 宏行 (Hiroyuki Nakaoka)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：90568677