

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：32702

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800035

研究課題名(和文) Coarse幾何学におけるコンパクト化とその境界の位相構造

研究課題名(英文) Topological structure of a compactification and its boundary on coarse geometry

研究代表者

嶺 幸太郎 (MINE, Kotaro)

神奈川大学・工学部・助教

研究者番号：90512525

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：諸々の空間の無限遠への広がり方に関する諸性質を、その空間の無限遠境界(空間のコンパクト化における境界)のトポロジーと関連付けて分析し、次の成果を得た：(1)空間上の等長変換や相似変換、擬等長変換が誘導する境界上の位相不変な変換における不動点集合の状況、および空間の有限次元性との関連付けについて、(2)距離を用いて分析できる「遠さ」を一般化した、より抽象的な空間概念における無限遠への広がり方の分析、とくに主要な構造の同値性について、(3)空間の積と対応する無限遠境界との関係について。

研究成果の概要(英文)：We studied properties of large scale geometry from a view point of the topology of a boundary at infinity which is called the Higson corona. (1) We investigated a condition of a coarse map on the underlying space which induces a fixed point free homeomorphism on the corona. (2) We discussed a generalization of C_0 structures for uniform spaces and a relation between these Higson compactifications and Smirnov compactifications. (3) We also studied the Higson corona of the product of coarse spaces.

研究分野：幾何学的トポロジー

キーワード：Higson境界 粗空間 大スケール幾何学 漸近次元 一様空間 擬等長 コンパクト化 位相空間

1. 研究開始当初の背景

トポロジーにおける(非コンパクト)局所コンパクト距離空間(例えば非コンパクト位相多様体、局所有限な無限単体複体)の研究はコンパクト空間の議論をそのまま流用する方法が一般的であった。ところがこの方法では空間の広がり方に関する情報は見逃されてしまう。近年、特にグロモフの研究以来の幾何学的群論やそれに続く粗い幾何学(大スケール幾何学)の発展を見れば、空間の広がり方(擬等長同型で不変な性質のこと)は重要な幾何的情報を含むと認識され、局所コンパクト距離空間の新たな研究手法の開発が急務であると言える。本研究課題は、(局所コンパクト距離)空間の広がり方とその境界の關係に着目して、単純なコンパクト化ではなく空間の幾何的構造を反映するコンパクト化の位相構造を解明することにある。

空間の擬等長性をより広い立場から論じる枠組みとして Higson-Pedersen-Roe らが与えた粗構造は、写像の一樣連続性を定める一樣構造の双対的な概念と呼べるものである。擬等長性を論じる枠組みのほかに新たに導入される粗構造の主な例として、空間のコンパクト化から導かれる位相的粗構造と無限遠での距離の消滅性を用いて定める C_0 構造があり、これらの応用も既に論じられている。粗構造が導入された空間を粗空間と呼び、粗空間にはその無限遠境界(Higson 境界)および Higson コンパクト化が定められる。ここで重要な事実として、Higson 境界のトポロジーは粗空間の不変量となることが挙げられる。これにより、空間の大スケールの性質を境界の位相的性質を通して分析する、といった研究手法が確立されてきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、研究代表者による無限次元多様体論および距離付けられた無限単体複体論の基本理論を元に、粗空間から生じる Higson 境界の位相構造を(1)コンパクト化の近似問題との關係、(2)粗写像が誘導する Higson 境界上の力学系の分析、(3)新たな代数的不変量の模索、といった立場から研究を進め、新規の研究手法の開発と幾何学的群論への応用を考察することである。

3. 研究の方法

平成 25 年度は、これまでの実績を踏まえ、何が必要な手法か、また必要な手法を如何に習得するかなど研究の方針を検討・確定したうえで、私自身では補えないトピックスや新たな研究手法を得るための調査・情報収集を行った。平成 26 年度以降は初年度で確定した方針に基づいて共同研究者らとのセミナーを定期的に持ち、議論を中心とした研究活動を行った。また、国内外の国際会議や研究集会において本研究の成果を公表するとともに、関連分野の研究者との議論を通じて情報交換を行った。最終的な研究成果を国際的

な専門誌に出版した。

4. 研究成果

(1) 固有距離空間上の擬等長変換が誘導する Higson 境界上の同相変換の不動点について分析し、不動点集合を元の空間の部分集合の境界として表示するための条件・方法を得た。とくに、漸近次元の有限次元性と関連する状況のもとで(例えば空間が大スケール doubling であれば良い)、不動点が存在するための必要十分条件を得た。更にこの結果を応用することで、 n 次元ユークリッド空間上の相似変換や $CAT(0)$ 空間上の等長な対合が誘導する Higson 境界上の同相変換について、その不動点集合を決定した。以上の結果はグロモフ双曲空間の等長変換に対しても適用することができる。しかしながら、これを擬等長変換の場合にも適用できるかどうか、更には漸近次元が有限な任意の空間へ結果を拡張できるかどうか分かっておらず、今後の研究課題として残っている。

(2) 研究代表者の先行研究により、局所コンパクトな全有界距離空間の C_0 構造に関する粗空間の圏と、それらの Higson 境界たちによる圏(これは距離化可能なコンパクト空間のなす圏に一致する)が同値であることが分かっていた。これはグロモフ双曲空間の擬等長変換と空間の理想境界上の擬メビウス変換に関する、ある意味で微分幾何的な対応の位相幾何的なアナロジーである。この内容を更に精査するとともに、ヒルベルト立方体を境界とする粗空間が、上記の粗空間のクラスにおける普遍空間となることを通して、粗空間の埋め込み問題について論じ、学術論文として出版した。

(3) C_0 構造を一樣空間上の概念として拡張し、これと位相的粗構造との關係について分析した。その結果、これらが実質的に同値な概念であるということ突き止めた。すなわち、完全正則かつハウスドルフな局所コンパクト空間 X に対して次が成り立つ: X の任意の位相的粗構造に対して、 X の一樣構造を上手く定めることにより、その一樣構造から導かれる C_0 構造が与えられた位相的粗構造と一致するようである。 X の任意の一樣構造から導かれる C_0 構造に対して、その Higson コンパクト化が定める位相的粗構造はもとの C_0 構造に一致する。一樣空間 X の C_0 構造に関する Higson コンパクト化と一樣構造に関する Samuel コンパクト化は一致する。

(4) Higson コンパクト化は、大スケール幾何学における無限遠境界を与えるコンパクト化の中で普遍的であると考えられる。しかしながら、その普遍性を主張する文献はなく、また、そもそも「大スケール幾何学におけるコンパクト化」という概念に明確な定義が与

えられているわけではない。そこで本研究において、この概念にかりそめの定義を与えたい。その普遍性について論じた。ここでは、固有距離空間のクラス(ただし射は粗写像とする)からコンパクト化のクラス(ただし射は、境界上の各点で連続な写像とする)への関手が与えられたとき、この対応を大スケール幾何学におけるコンパクト化と定める。すると、このような射の中で Higson コンパクト化を与える関手がコンパクト化の向きについて最大であることが分かった。したがって、この意味において Higson コンパクト化は普遍的であると宣言できる。

(5) 粗空間の積と、それらの Higson 境界の積との関係について分析した結果、次の結論が得られた: Higson コンパクト化として実現できないコンパクト化の新しい例を得た。例えば、二つ固有距離空間 X 、 Y の有界粗構造から定まるコンパクト化 $h(X)$ 、 $h(Y)$ による積空間 $h(X) \times h(Y)$ は $X \times Y$ のコンパクト化とみなせるが、これは $X \times Y$ にいかなる粗構造を導入しようとも、その Higson コンパクト化 $h(X \times Y)$ に一致することはない。距離付け可能なコンパクト化から誘導される粗空間について、それらの粗空間としての自然な積に関する Higson 境界は 1 点になってしまう。二つの粗空間 X 、 Y の積の Higson コンパクト化 $h(X \times Y)$ が、もとの Higson コンパクト化たちの積 $h(X) \times h(Y)$ と一致するのは自明な場合、すなわちそれらが $X \times Y$ の 1 点コンパクト化であるときに限る。これらの結果は、かつて位相空間論において論じられたストーン・チェックコンパクト化の積に関する結果 (Glicksberg の定理) との類似性が認められる。すなわち、古典的な手法の発掘が大スケール幾何学において有効であることを示唆している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

嶺幸太郎, 山下 温, Coarse 空間の積とその境界, 査読無, 数理解析研究所講究録 1987, (2016), 49-54.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1987.html>

K. Mine and A. Yamashita, Metric compactifications and coarse structures, 査読有, Canad. J. Math. 67 (2015), 1091-1108.
DOI:10.4153/CJM-2015-029-8

K. Mine, A. Yamashita and T. Yamauchi, C_0 coarse structures on uniform spaces, 査読有, Houston J. Math. 41 (2015), 1351-1358.

<https://www.math.uh.edu/~hjm/Vol141-4.html>

嶺幸太郎, Higson コンパクト化の Universality について, 査読無, 数理解析研究所講究録 1932, (2015), 7-11.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1932.html>

嶺幸太郎, Higson 境界上の同相変換の不動点集合, 査読無, 数理解析研究所講究録 1884, (2014), 40-47.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1884.html>

T. Banakh, K. Mine, K. Sakai, T. Yagasaki, On homeomorphism groups of non-compact surfaces, endowed with the Whitney topology, 査読有, Topology Appl. 164 (2014), 170-181.
DOI:10.1016/j.topol.2013.12.013

T. Banakh, K. Mine, D. Repovš, K. Sakai, T. Yagasaki, Detecting topological groups which are (locally) homeomorphic to LF-spaces, 査読有, Topology Appl. 160 (2013), 2272-2284.
DOI:10.1016/j.topol.2013.07.023

[学会発表](計20件)

嶺幸太郎, 微分積分学と位相空間論, 横浜セミナー, 横浜国立大学, 2017年2月3日.

嶺幸太郎, Coarse 空間の正規性, 横浜セミナー, 横浜国立大学, 2016年11月25日.

嶺幸太郎, 粗空間の積とその境界, 集合論的位相幾何学および幾何学的トポロジーの最近の動向と展望, 京都大学 数理解析研究所, 2015年11月17日.

嶺幸太郎, Product of coarse spaces and its boundary, 葉層構造と微分同相群 2015 研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市), 2015年10月30日.

嶺幸太郎, 位相空間論からの話題, 無限群と幾何学の周辺, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市), 2015年7月12日.

嶺幸太郎, Higson corona and fixed points, Dubrovnik VIII - Geometric Topology, Geometric Group Theory & Dynamical Systems, Dubrovnik 大学(クロアチア), 2015年6月25日.

嶺幸太郎, Coronae of coarse spaces and uniform spaces, International Conference on Preserver Problems and

Related Topics, 新潟大学, 2015年5月24日.

嶺幸太郎, Higson コンパクト化の普遍性について, 第38回トポロジーセミナー, 山喜旅館(静岡県伊東市), 2015年3月18日.

嶺幸太郎, Higson 境界と不動点集合, つくばセミナー, 筑波大学, 2015年3月6日.

嶺幸太郎, Higson コンパクト化の Universality について, 集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野の交流, 京都大学 数理解析研究所, 2014年10月22日.

嶺幸太郎, 位相空間論入門, つくばフレッシュマンセミナー, 筑波大学, 2014年7月21日.

嶺幸太郎, コンパクト化...空間にふたをする, 無限群と幾何学の新展開のアウトリーチについての研究会, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市), 2014年6月6日.

嶺幸太郎, Graph-like 連続体について, 第6回早稲田幾何学的トポロジー研究集会, 早稲田大学, 2014年3月24日.

嶺幸太郎, Higson 境界上の同相変換と不動点集合, 第37回トポロジーセミナー, いこいの村たてやま(千葉県館山市), 2014年3月20日.

嶺幸太郎, Higson 境界上の同相変換の不動点集合, 集合論的及び幾何学的トポロジーの現状とその展望, 京都大学数理解析研究所, 2013年10月17日.

嶺幸太郎, Homeomorphism of a Higson corona and its fixed points, 研究集会「群と幾何学の展望」, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市), 2013年10月13日.

K. Mine, Approximation Theorems for compactifications, 5th Waseda Geometric topology meeting, 早稲田大学, 2013年9月12日.

K. Mine, Subdivisions of simplicial complexes preserving the metric topology, International Conference on Topology and Geometry 2013, 島根大学, 2013年9月5日.

K. Mine, Metric compactifications and coarse structure, 28th Summer Conference on Topology and its Applications, Nipissin 大学, North Bay(カナダ), 2013年7月25日.

嶺幸太郎, Coarse 幾何学と位相空間論, 第1回つくばフレッシュマンセミナー, 筑波大学 2013年7月15日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

嶺 幸太郎 (MINE, Kotaro)
神奈川大学・工学部・助教
研究者番号: 90512525

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.kanagawa-u.ac.jp/mine/>