

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：12608
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：25800037
研究課題名(和文) Knot theory and algebraic combinatorics

研究課題名(英文) Knot theory and algebraic combinatorics

研究代表者

KALMAN Tamas (Kalman, Tamas)

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：00534041

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：内部多項式は、とりわけハイパーグラフに関連付けることができる。ハイパーグラフの転置(transpose)と呼ばれる自然な双対性がある：頂点とハイパーエッジを単に交換する。ハイパーグラフの内部多項式とその転置が一致すると推測していた。A. Postnikovとの共同研究では、内部ポリゴンをいわゆるポリトープのエハルハート多項式として解釈することで、このステートメントを証明した。これは、内部多項式の係数が特定のリンクのHomfly多項式の係数の中で発生するという証明のための最後の残りのステップでもあり、私の研究で予測されたようにこれらの係数がFloer相同性グループから導かれることが証明された。

研究成果の概要(英文)：The interior polynomial can be associated, among other things, to hypergraphs. There is a natural duality, called the transpose, of hypergraphs: it simply interchanges the vertices and the hyperedges. I had conjectured for some time that the interior polynomial of a hypergraph and its transpose agree. In joint work with A. Postnikov we proved this statement by interpreting the interior polynomial as the Ehrhart polynomial of the so called root polytope. This was also the last remaining step for the proof that the coefficients of the interior polynomial occur among those of the Homfly polynomial of certain links, which in turn proved that these coefficients can be derived from Floer homology groups, as predicted in my research program.

研究分野：位相幾何学

キーワード：低次元トポロジー

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、2000年頃から、低次元トポロジーは2つの新しい発見によって支配されてきた。1つは、正則曲線を適切に数えることによって定義される不変量のパッケージで、この「フロア理論」にはいくつかの同等の記述があり、最もよく知られているのは Heegaard Floer 相同性である。もう一つの進歩は、ジョーンズ (Jones) などによる多項値のノット不変量をさらに強化 (分類) する代数的構造の Khovanov-Rozansky 相同性である。

研究代表者は、2013年までにこれらの理論はどちらも比較的成熟していたが、お互いの関係については驚くほどほとんど知られていなかった。私はそれらの間に新しい、予想される“橋”を知り、その現象の証拠を見つけることを強く意識し、真に二つの理論を統一された枠組みの中にもたらすためのつながりを広げること強く感じた。

2. 研究の目的

期間の初めに研究代表者は、2つの主な目的を持っていた。一つは、Homfly多項式や他の Jones 型ノット不変量の自然な (すなわち、ダイアグラムとは無関係に) 幾何学的な定義を見つけることで、低次元トポロジーでは大きな問題であり、フロアの相同性不変量から解を抽出できるように空間を構築して解くことを望んでいた。

うまくいけばこのような構造につながる新しい洞察は、代数的組合せから来ている。私は、ポリマトロイドの内外多項式と呼ばれる2つの概念を導入した。私の第2の主な目的は、理論をさらに発展させ、アプリケーションの多くを見つけることだった。

3. 研究の方法

数学にとって、この項目は有効ではないため、ここでは省くこととする。そのかわりに、研究成果をご覧いただきたい。

4. 研究成果

最初に、交代結び目について研究についてから述べたい。交代結び目については、これまでも MIT の Postnikov 教授との共同研究で行ってきたが、今までのものに加えて、Polynomial invariants of bipartite graphs and hypergraphs というテーマで取り組んだ。Postnikov 教授との一連の研究成果は、Root polytopes, Tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite graphs というタイトルで論文にまとめた。

それまでの研究を発展させて、研究代表者は、さらに、Connections between the Homfly polynomial of knots and sutured Floer homology についての研究にも取り組んだ。これは、ケンブリッジ大学の Jacob Rasmussen 教授とともに取り組んだものである。研究代表者がケンブリッジ大学を訪れ、議論に時間をかけ、ほかの研究者からも助言やフィードバックを得た。その成果は、Khovanov-Rozansky homology and the Heegaard Floer chain complex of the branched double cover というタイトルの論文にまとめた。

そして、先にも述べた MIT の Postnikov 教授とのこれまでの研究のうち、われわれが数年前に作り上げた “abstract duality conjecture” の証明を、終えた。この証明により、ある Floer ホモロジー群から交代結び目の Homfly 多項式の、ある係数を引き出すことが可能となるわけである。この成果は、当該研究者の過去五年間の研究において、中心的な目標でもあった。一連の研究成果は、“Polynomial invariants of bipartite graphs and hypergraphs” と “Computing Homfly coefficients from Floer homology” という題目で研究発表を行い、論文としてもまとめて発表した。

そのあとで、「二部グラフの多項式不変量」についての共同研究は、上記の “abstract duality conjecture” の進化した新バージョンである。この証明にも取り組んだ。その内容とは、二部グラフに誘導される二つのハイパーグラフの、いわゆる interior polynomial が一致する、ということを示したものと説明できる。この成果は、研究発表のみならず、Postnikov 教授との 30 ページにも及ぶ共著論文 (“Root polytopes, Tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite graphs”) として、発表してある。

内部多項式は、とりわけハイパーグラフに関連付けることができる。ハイパーグラフの転置 (transpose) と呼ばれる自然な双対性がある：頂点とハイパーエッジを単に交換する。私はある時間、ハイパーグラフの内部多項式とその転置が一致すると推測していた。A. Postnikov との共同研究では、内部ポリゴンをいわゆるポリトープのエハルハート多項式として解釈することで、このステートメントを証明した。これは、内部多項式の係数が特定のリンクの Homfly 多項式の係数の中で発生するという証明のための最後の残りのステップでもあり、私の研究プログラムで予測されたようにこれらの係数が Floer 相同性グループから導かれることが証明された。

D. Mathews との共同作業では、縫合された

マニホールドのクラスの密着構造を列挙しました。実際には、私の主な研究プログラムの一環として、JuhaszとRasmussenとの私の以前の研究で縫合されたFloer相同性グループが計算されたのと同じマニホールドである。Mathewsと私は、これらの構造がいわゆる接触クラスによって決定され、これらの接触クラスが縫合されたFloer相同性の基礎をなすようにそれらの構造クラスが十分に存在することを見出した。他の結果と組み合わせることで、コンタクトトポロジーとジョーンズ型ノット不変量との間に予期せぬ興味深い結びつきが確立される。

Bernardi他によるTutte多項式の計算方法は、これまでの古典的な定義に比べて、はるかに柔軟性があり、位相的でもある。ハンガリーのエトヴォス大学のTothmeresz氏とともに、このBernardiアプローチをinterior polynomialに適用した。その成果は、結び目不変量の研究において有効であり、今後の研究においてもこの分野で分岐点となるであろう。

研究代表者は、この助成期間内で、アメリカ合衆国のマサチューセッツ工科大学、コーネル大学、スウェーデンのウプサラ大学、ハンガリーのエトヴォシュローラン大学、東北大学の研究者と、国際的な共同研究を行ってきた。その成果は、既に上記で述べた通り、各大学でのセミナーや、学会、研究会、そして、国際的な査読付きの雑誌において発表してきた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計4件)

- ① Tamas Kalman and Hitoshi Murakami. Root polytopes, parking functions, and the HOMFLY polynomial, *Quantum Topology*. 8 (2017), no. 2, 205-248. 査読有
- ② Tamas Kalman and Alexander Postnikov. Root polytopes, Tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite graphs, *Proceedings of the London Mathematical Society*. 114 (2017), no. 3, 561-588. 査読有
- ③ Tobias Ekholm, Ko Honda, Tamas Kalman. Legendrian knots and exact Lagrangian cobordisms. *Journal of the European Mathematical Society* 18 (2016), no. 11, 2627-2689. 査読有
- ④ Tamas Kalman. A version of Tutte's polynomial for hypergraphs. *Advances in Mathematics* 244 (2013), no. 10,

823-873. 査読有

〔学会発表〕 (計11件)

- ① Tamas Kalman *The Tutte polynomial, hypergraphs, and duality*. 2017年3月. Discrete Mathematics Seminar. モナシユ大学 (オーストラリア、メルボルン)
- ② Tamas Kalman *The Homfly polynomial, Floer homology, and contact structures*. 2017年3月. Topology Seminar. モナシユ大学 (オーストラリア、メルボルン)
- ③ Tamas Kalman *The Homfly polynomial and Floer homology*. 2017年2月. The Twelfth East Asian School of Knots and Related Topics, 東京大学 (東京都目黒区)
- ④ Tamas Kalman *The Homfly polynomial and Floer homology*. 2016年9月. Topology Seminar. ウプサラ大学 (スウェーデン、ウプサラ)
- ⑤ Tamas Kalman *A new look at the Tutte polynomial*. 2016年9月. 第3回ウプサラ大学-東京工業大学共同シンポジウム, ウプサラ大学 (スウェーデン、ウプサラ)
- ⑥ Tamas Kalman *Hypergraph polynomials*. 2016年3月. Discrete Mathematics Seminar. コーネル大学 (アメリカ合衆国、イサカ)
- ⑦ Tamas Kalman *Hypergraph polynomials*. 2016年1月. Colloquium Talk. 東北大学 (宮城県仙台市)
- ⑧ Tamas Kalman *Hypergraph polynomials*. 2015年11月. 第2回ウプサラ大学-東京工業大学共同シンポジウム. 東京工業大学 (東京都目黒区)
- ⑨ Tamas Kalman *Parking functions and knot invariants*. 2015年1月. Topology Seminar. 東京工業大学 (東京都目黒区)
- ⑩ Tamas Kalman *Computing Homfly coefficients from Floer homology*. 2014年1月. Topology Seminar. ボストン・カレッジ (アメリカ合衆国、ボストン)
- ⑪ Tamas Kalman *Polynomial invariants of bipartite graphs and hypergraphs*. 2014年1月. Discrete Mathematics Seminar. マサチューセッツ工科大学 (アメリカ合衆国、ケンブリッジ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

カールマン タマシュ (KALMAN, Tamas)

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号： 00534041