様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８０００４１

研究課題名（和文）擬正則曲線とハミルトン力学系の周期軌道

研究課題名（英文）Pseudo-holomorphic curves and periodic orbits in Hamiltonian dynamics

研究代表者
入江　慶（Irie, Kei）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：９０６４５４６７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：シンプレクティック幾何における擬正則曲線の理論を応用してハミルトン力学系の周期軌道の研究を行い，以下の成果を得た：（１）境界付リーマン多様体の単位余接束のシンプレクティック容量をループ空間の幾何を用いて計算し，応用として最短周期ビリヤード軌道の長さのよい評価を得た．（２）ストリング・トポロジーの積構造を鎖複体レベルで定義（構成）した．これは，余接束のフレア・ホモロジー上の高次積と対応すると予想される．（３）埋込接触ホモロジーの理論を応用し，三次元レーブ流および二次元ハミルトン微分同相写像に対してＣ∞級の閉補題を証明した．

研究成果の概要（英文）：I studied applications of pseudo-holomorphic curve theory in symplectic geometry to the study of periodic orbits of Hamiltonian systems.
Main achievements are: (1). Computation of symplectic capacity of unit disk cotangent bundle of a Riemannian manifold with boundary via geometry of free loop space. As an application, a good estimate of the shortest length of periodic billiard trajectory was obtained. (2). Construction of chain-level algebraic structures in string topology, which conjecturally correspond to higher products in Floer homology of cotangent bundles. (3). Proof of C-infinity closing lemma for three-dimensional Reeb flows and two-dimensional Hamiltonian diffeomorphisms using embedded contact homology.

研究分野：シンプレクティック幾何学

キーワード：擬正則曲線　ハミルトン力学系　周期軌道

１．研究開始当初の背景

ハミルトン力学系の周期軌道の研究は，力学系とシンプレクティック幾何学にまたがる重要な問題である．周期軌道に対する変分法によるアプローチは古典的なものであるが，８０年代にフレアにより擬正則曲線の理論を用いてモース理論の類似を展開するという画期的な手法が導入された．フレア理論はその後多くの研究者により活発に研究され大きく発展したが，そうして得られた知見を再び具体的・古典的なハミルトン力学系の問題（たとえば，ビリヤード軌道の研究）に適用してどのような結論が得られるかということについては，まだ理解すべきことが多くあると考えた．以上が研究開始当初の背景・動機である．

２．研究の目的
本研究開始以前に得られていた成果に基づき，とりあえずの目標として以下の二つの問題を設定した．

（１）: 周期ビリヤード軌道に関わるシンプレクティック容量の理解

シンプレクティック多様体の「大きさ」を測るシンプレクティック容量という概念があり，ハミルトン力学系の周期軌道の研究と深く関わる．たとえば，コンパクト境界付リーマン多様体の単位余接束のシンプレクティック容量を考えると，それと等しい長さの周期ビリヤード軌道の存在が分かる（このアイデアは本質的にヴィテルボによる）．私は，本研究開始以前に，このシンプレクティック容量の評価を与えていたが，その手法はかなり間接的なものであった．そこで，この容量のより直接的な理解，とくに自由ループ空間の幾何との関わりを明らかにすることを目標とした．

（２）: 鎖複体レベルでのストリング・トポロジーの構成

閉多様体の余接束のフレア・ホモロジーと，多様体上の自由ループ空間のホモロジーが同形になることは（ヴィテルボ等による）基本的な結果である．またこの同形を通じて，フレア・ホモロジー上の自然な積構造の自由ループ空間側の対応物は，ストリング・トポロジーにおいて研究されているループ積に一致する．本研究開始以前に，この対応を応用して単位余接束のシンプレクティック容量の評価を得ていた．この方向の研究をさらに進めるには，フレア・ホモロジー上での高次の積構造を用いるのが自然である．そのために，ストリング・トポロジー側の積構造を鎖複体のレベルで理解する必要があるのだが，横断正則性などの技術的な困難のため，この方向の研究は進んでいなかった．そこで，ストリング・トポロジーにおける代数構造を鎖複体レベルで定義し，そこから（マッセイ積などの）高次の積構造を引き出す枠組みを作ることを目標とした．

３．研究の方法

数学の研究なので，図書や論文，あるいは研究集会への参加を通じて先行結果を学び，それをもとに自分で考えることが基本になる．研究成果をまとめるときは，コンピューター上で TeX を用いて論文を執筆し，また国際研究集会を含む講演で成果を発表し，参加者との討議を行った．科研費は図書・コンピューターの購入および旅費として使用した．

４．研究成果
（１），（２），（３）の三つに分けて述べる．

（１）: 周期ビリヤード軌道とシンプレクティック容量

これは，研究目的（１）に対する解答である．コンパクト境界付リーマン多様体に対して，その単位余接束のシンプレクティック容量，正確にはフレア・ホーファー・ウィソキ（ＦＨＷ）容量を考える（前述したように，これと等しい長さをもつ周期ビリヤード軌道が存在する）．論文⑤において，多様体がユークリッド空間内の領域である場合に，ＦＨＷ容量を自由ループ空間の相対ホモロジーを用いて表示する公式を証明した．これを用いて，本研究開始前に得られていた最短周期ビリヤード軌道の長さの評価を改良し，またより見通しの良い別証明を与えた．アヴィダン・オストローヴァはこれと同じ評価をユークリッド空間内の凸領域に対して与えていたが，論文⑤により凸性の仮定は不要であることが分かった．

さらに論文④では，周期ビリヤード軌道と自由ループ空間の相対ホモロジーを関係付ける一般的な結果を得た．証明は自由ループ空間上のモース理論とベンチ・ジアンノーニによる近似法を用いる．それを応用して，任意のコンパクト境界付リーマン多様体に対して容量という正実数値不変量を定義し，それと等しい長さの周期ビリヤード軌道が存在することを示した．　さらにそれを用いて，論文⑤で得た最短周期ビリヤード軌道の長さの評価を，任意のコンパクト境界付リーマン多様体に対して拡張した．また，アヴィダン・オストローヴァ，ゴーミ，ロットマン等により得られていた関連する諸結果に，容量の考察に基づく別証明を与えた．

(2): 鎖複体レベルでのストリング・トポロジーの構成

これは，研究目的（２）に対する解答である．

ストリング・トポロジーの出発点となるのは，閉多様体の自由ループ空間のホモロジー上にバタリン・ヴィルコヴィスキー（ＢＶ）代数の構造が定まるというチャス・サリバンの結果である．

論文③において，このＢＶ代数構造の鎖複体レベルでの精密化を与えた． つまり，自由ループ空間の鎖複体モデルを構成してそのうえに次数付微分オペラッドの作用を定め，ホモロジーレベルで上述のＢＶ代数構造を再現することを確認した．また，チェンによる反復積分の理論を通じて，この結果とホッホシルト複体に対するドリーニュ予想との関係を明らかにした．応用として，自由ループ空間のホモロジー上の A_∞積であって，ループ積と（多様体のホモロジー上の）マッセイ積の双方を一般化したものが得られる．これはストリング・トポロジーにおける「鎖複体レベルの構造」の最も簡単な例になっている．

上述の自由ループ空間の鎖複体モデルの構成における主要なアイデアは二つある．
一つ目は，横断正則性の問題に対処するために，ド・ラーム鎖という微分形式と特異鎖を折衷した概念を導入したことである．
ド・ラーム鎖の定義の原型は深谷氏により与えられていたが，論文③ではその定義に若干の変更を加えたうえでド・ラーム鎖の生成する鎖複体を明示的に定義し，自由ループ空間のド・ラーム鎖複体のホモロジーが特異ホモロジーと一致することを証明した．
二つ目は，標識点付きのループを組織的に用いることで，これは反復積分やラグランジュ部分多様体のフレア理論における A_∞代数構造の構成と深く関係する．

なお，シンプレクティック幾何学への応用については論文③では明示的には言及されていないが，その後ラグランジュ部分多様体の研究に重要な応用があることが分かり，現在論文を準備中である．

(3)： 埋込接触ホモロジーを用いた C^∞級閉補題の証明

C^r級閉補題（ただしｒは正整数または∞）とは，おおまかには「多様体Ｍ上の力学系Ｆと，Ｆの非遊走領域と交わるＭの開集合Ｕに対して，Ｕ を通る周期軌道を持つ力学系 F’でＦにC^r位相でいくらでも近いものが存在する」という主張である．ピューおよびピュー・ロビンソンは多くの設定でC^1級閉補題を証明し，その帰結としてC^1級一般稠密定理 （C^1位相について生成的な力学系において周期軌道は非遊走領域の中で稠密に存在するという主張）を導いた．
一方，ｒが２以上のときは簡単な場合（一次元多様体上の写像および二次元多様体上のフロー）を除いて肯定的な結果が知られておらず，それ以外の場合に，２以上のｒについてC^r級閉補題を証明することは力学系における有名な未解決問題のひとつである．

論文②において，三次元閉接触多様体上のレーブ力学系に対して C^∞級閉補題が成立することを証明した．レーブ力学系は自励ハミルトン力学系の特別なクラスであるが，一般の自励ハミルトン力学系においては C^∞級閉補題が成立しない（エルマンによる結果）ことと比較するとこの結果は驚くべきものである．証明は三次元閉接触多様体に対する埋込接触ホモロジーの理論（ハッチングスおよびハッチングス・タウベスにより導入された一種のフレア・ホモロジー）に基づく．とくに，この理論に付随する，スペクトル不変量という実数値不変量の漸近的な挙動から接触多様体の体積が復元されるという最近の結果（クリストファロ-ガーディナー・ハッチングス・ラモスによる）が鍵となる．

さらに②を応用して，論文①において，二次元閉シンプレクティック多様体上のハミルトン微分同相写像に対して C^∞級閉補題が成立することを証明した．二次元閉シンプレクティック多様体上のシンプレクティック微分同相写像に対してC^r級一般稠密定理が成立するか，という問は r=1 の場合をピュー・ロビンソンが肯定的に解決して以来，ｒが２以上の場合は未解決だった．一方論文①の帰結として，二次元球面の場合に，すべてのｒに対して C^r級一般稠密定理が成り立つことが分かった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Masayuki Asaoka, <u>Kei Irie</u>,
A $C^¥infty$ closing lemma for Hamiltonian diffeomorphisms of closed surfaces,
Geometric and Functional Analysis（査読有）, Vol. 26 (2016), 1245—1254.

② <u>Kei Irie</u>,
Dense existence of periodic Reeb orbits and ECH spectral invariants,
Journal of Modern Dynamics（査読有）, Vol. 9 (2015), 357—363.

③ <u>Kei Irie</u>,
A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains,
International Mathematics Research Notices（査読有）, doi:10.1093/imrn/rnx023

④ Kei Irie,
Periodic billiard trajectories and Morse theory on loop spaces,
Commentarii Mathematici Helevetici（査読有）, Vol. 90 (2015), 225—254.

⑤ Kei Irie,
Symplectic homology of disc cotangent bundles of domains in Euclidean space,
Journal of Symplectic Geometry（査読有）Vol. 12 (2014), 511—552.

〔学会発表〕（計１１件）

① Kei Irie,
$C^¥infty$-closing lemma for three-dimensional Reeb flows via embeded contact homology,
Beyond Hamilton-Jacobi: Last call to Brodeaux, 2017/1/9-13, ボルドー（フランス）

② Kei Irie,
$C^¥infty$-closing lemma for three-dimensional Reeb flows via embedded contact homology,
Symplectic Geometry and Topology, 2016/7/25-29, エジンバラ（イギリス）

③ Kei Irie,
$C^¥infty$-closing lemma for three-dimensional Reeb flows via embedded contact homology,
International Conference on Dynamical Systems, 2016/7/4-8, ブジオス（ブラジル）

④ Kei Irie,
$C^¥infty$-closing lemma for three-dimensional Reeb flows via embedded contact homology,
Warwick Dynamical Systems work shop, 2016/6/6-8 , コヴェントリー（イギリス）

⑤ 入江　慶,
$C^¥infty$-closing lemma for three-dimensional Reeb flows via embedded contact homology,
日本数学年会（特別講演）,
2016/03/16-19, 筑波大学（つくば市）

⑥ 入江　慶,
Chain level operations in string topology via de Rham chains,
第 62 回トポロジーシンポジウム,
2015/8/6-9, 名古屋工業大学（名古屋市）

⑦ Kei Irie,
Chain level operations in string topology via de Rham chains,
Moduli spaces in symplectic topology and in gauge theory,
2015/6/1-5, マルセイユ（フランス）

⑧ 入江 慶,
Transversality problems in string topology and de Rham chains,
第 61 回幾何学シンポジウム,
2014/8/23-2, 名城大学（名古屋市）

⑨ Kei Irie,
Transversality problems in string topology and de Rham chains,
NCTS(South) geometry conference,
2014/6/30-7/4, 台南市（台湾）

⑩ Kei Irie,
Symplectic homology of disk cotangent bundles of domains in Euclidean space,
East Asian Symplectic Conference 2013,
2013/9/18-21 鹿児島大学（鹿児島市）

⑪ Kei Irie,
Hofer-Zehnder capacity, symplectic homology and loop product,
Floer and Novikov homology, contact topology and related topics,
2013/4/21-24, IPMU(千葉県柏市)

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者

入江　慶（IRIE, Kei）
京都大学数理解析研究所・助教
研究者番号：90645467

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし
(4)研究協力者
なし