

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800042

研究課題名(和文) 測度の集中現象のLaplacianの解析学と幾何学への応用

研究課題名(英文) Applications of the concentration of measure phenomenon to analysis and geometry of Laplacian

研究代表者

船野 敬 (Funano, Kei)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：40614144

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：非負Ricci曲率(くびれを持たない)閉Riemann多様体上のLaplacianの固有値の上からの評価を得た。この評価は多様体上の(任意)有限個の部分集合の情報によるものであり、今後も応用が期待されるものである。手法は最適輸送理論による。またユークリッド空間内の凸領域に関するNeumann条件下でのLaplacianの固有値に関して領域単調性・非単調性の研究を行った。
更にLaplacianの固有値の間の非自明な普遍不等式を得た。方法はham sandwichの定理と呼ばれる代数的位相幾何学によるものである。これら結果は幾何学的・解析的にも意義深いものと思われる。

研究成果の概要(英文)：I obtained some upper bound estimates of eigenvalues of the Laplacian on closed Riemannian manifolds of nonnegative Ricci curvature. These estimates state that one can estimate eigenvalues in terms of information of finite number of subsets of the manifold. The method I used in the proof is the theory of optimal transportation.
I also studied domain monotonicity/reverse domain monotonicity for Neumann eigenvalues of the Laplacian on convex domains in a Euclidean space. Furthermore I got nontrivial universal inequalities among eigenvalues of the Laplacian. In the proof I used the ham sandwich theorem coming from algebraic topology. These studies are valuable.

研究分野：スペクトル幾何学

キーワード：Laplacianの固有値 Ricci曲率 凸体 普遍不等式 ham sandwichの定理 最適輸送

1. 研究開始当初の背景

Euclid 空間の領域あるいは閉 Riemann 多様体上の Laplacian の固有値の分布の研究(普遍不等式の研究)は古典的であるが、体積、曲率、閉測地線の分布等と密接に関係しており幾何学的にも現在でも興味をつけない研究対象である。Payne-Polya-Weinberger によって最初に Euclid 空間の領域の Dirichlet 境界条件を課した Laplacian の固有値の間の普遍不等式が得られていた。その後は Dirichlet 境界条件を課した固有値の研究結果が主であり、閉 Riemann 多様体上では等質多様体の場合に P. Li によって普遍不等式が得られていた。その後、私と塩谷隆氏の研究により非負 Ricci 曲率を持つような閉 Riemann 多様体の Laplacian の固有値に対して次元普遍不等式が得られていたが、それは量的な評価ではなかった。また非負 Ricci 曲率を持つ完備 Riemann 多様体の凸領域で Neumann 条件を課した場合でも成立していた。また同様に Courant の minmax principle から Dirichlet 境界条件を課した Laplacian の固有値に関しては領域単調性が、Neumann 境界条件を課した Laplacian の固有値に関しては制限付き領域非単調性が知られていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、測度の集中現象の観点から Laplacian に関する幾何学と解析学の研究を行うことである。多様体上や graph 上の Laplace 作用素の固有値や固有関数の挙動は、空間の構造を反映するのみならず、その空間上の解析学を行う上で重要となる。また graph 上の Laplacian の固有値を調べることは安全で効率のよい network の構成(expander graph)と関連し、現在も整数論、幾何学、graph 理論といった幅広い分野で活発に研究が行われている。一方、測度の集中の不等式は確率測度を持った距離空間(測度距離空間)の測度が $1/2$ 以上の部分集合を取ってきたときに、その集合の r -近傍にどれだけ測度が集中しているのかを研究する分野であり、これは一般に Poincare の不等式よりも弱い不等式の研究である。近年 E. Milman により非負 Ricci 曲率を持つ閉 Riemann 多様体上では測度の集中不等式と線形等周不等式が同値であることが証明され、特に測度の集中不等式は Poincare の不等式と同値となることが知られている。幾何解析の観点から測度の集中現象は近年急速的に重要性を増している分野である。測度の集中現象の観点から私は Laplacian に関する以下に述べる研究を行うことが目的であった。

- (1) 非負曲率 compact Alexandrov 空間上の Laplacian の固有値の間の普遍不等式の研究
- (2) 閉 Riemann 多様体の Laplacian の固有値と関数の分布と挙動の研究

- (3) Expander graph と coarse 埋め込み不可能性に関する研究。

3. 研究の方法

非負曲率 compact Alexandrov 空間の場合に Laplacian の固有値の間の次元普遍不等式を証明するのに問題となるのは、isoperimetric profile に関する凹性の部分であり、これは多様体の場合は幾何学的測度論と Heintze-Karcher の定理などの Riemann 幾何学特有の定理を用いて証明されている。非負曲率 Alexandrov 空間やより一般の曲率次元条件 $CD(0, \cdot)$ を満たす測度距離空間ではこの手法は適用できず、測度集中から線形等周不等式を導くのは難しい。より弱い Poincare の不等式なら可能性がある。Gozlan-Roberto-Samson によって $CD(0, \cdot)$ の下で指数型測度集中不等式が Poincare の不等式を導くことが知られている。従って、非負曲率 Alexandrov 空間で証明するには、 $CD(0, \cdot)$ の下で測度集中の不等式から指数型測度集中不等式を導けばよいので、まずはこのことを示す。Ledoux の熱半群の議論により、非負 Ricci 曲率の仮定の下で測度集中の不等式からある形の等周不等式が成り立つことが知られており、その等周不等式から指数型集中不等式が従うことが知られている。Ledoux の証明では Bakry-Ledoux と Bakry-Emery 型の熱半群の勾配評価が用いられているが、これを Alexandrov 空間上で示す。

4. 研究成果

非負 Ricci 曲率を持つ(より正確には曲率次元条件 $CD(0, \cdot)$ を満たす)閉 Alexandrov 空間上の Laplacian の固有値の上からの評価をその Alexandrov 空間上の任意有限個の部分集合の情報だけで得ることができた。特に二つの部分集合だけの評価の場合は、指数型測度の集中不等式と同値であり、そのことを用いると Alexandrov 空間上の Laplacian の第 k 固有値と第 1 固有値の間の次元普遍不等式を得ることができる。このことは以前の私と塩谷隆氏の論文であげた予想の解決を与えるものである。証明では等周問題の面積最小図形の正則性理論に頼るのを避け測度集中ならびに最適輸送の道具のみを使った。さらにこの論文で非負 Ricci 曲率を持つ Alexandrov 空間の Laplacian の第 $k+1$ 固有値と第 k 固有値の比に関する重要と思われる予想を提唱した。このことを論文にまとめ投稿し Israel Journal of Mathematics に掲載された。

また考える領域を凸領域に制限して Neumann 固有値に関して、定数倍込みで領域単調性・非単調性の性質を得た。同時に凸領域の Laplacian の Neumann 固有値の間の非自明な普遍不等式も得た。証明には私によって得られていた任意有限個の部分集合の情報によって Laplacian の Neumann 固有値を上から評価する結果並びに(本質的に)Gromov による領域の分割が与えられたときのその分割

の各部分領域の Cheeger 等周定数による元の領域の Laplacian の Neumann 固有値に関する下からの評価を用いている。Gromov による結果は私が Gromov の本に書いてあることを少し一般化したものである、また書いた当初は確かめられていなかった(と思われる) Laplacian の固有関数の性質に関する部分も確かめた。Gromov の方法は代数的位相幾何学における結果の ham sandwich 定理を用いるものであり、また私の昨年度に得られていた結果は最適輸送理論を用いるものであり、これら二つの一見無関係な理論を用いて Laplacian の固有値に関する結果を得たのは十分に意義があると思われる。このことを論文にまとめ投稿し雑誌 Analysis and geometry of metric spaces に掲載された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

1. Kei Funano, Estimates of eigenvalues of the Laplacian by a reduced number of subsets, Israel J. Math. 217 (2017), no. 1, 413-433, 査読有り
doi:10.1007/s11856-017-1453-7
2. Kei Funano, Applications of the 'ham sandwich theorem' to eigenvalues of the Laplacian, Anal. Geom. Metr. Spaces 4 (2016), 317-325, 査読有り
DOI:https://doi.org/10.1515/agms-2016-0015

[学会発表](計 21 件)

1. 船野敬, Waist Inequalities IV, Mt. Aoba min-max mini-workshop/school, 2017 年 3 月 17 日, 東北大学.
2. 船野敬, Waist Inequalities III, Mt. Aoba min-max mini-workshop/school, 2017 年 3 月 17 日, 東北大学.
3. 船野敬, Waist Inequalities II, Mt. Aoba min-max mini-workshop/school, 2017 年 3 月 16 日, 東北大学.
4. 船野敬, Waist Inequalities I, Mt. Aoba min-max mini-workshop/school, 2017 年 3 月 16 日, 東北大学.
5. 船野敬, ハムサンドイッチとラプラシアン, リーマン幾何と幾何解析, 2017 年 2 月 24 日, 京都大学.
6. 船野敬, 巨視的スカラー曲率について, 微分トポロジーセミナー, 2016 年 12 月

20 日, 京都大学.

7. 船野敬, ハムサンドイッチとラプラシアン, 幾何と解析セミナー, 2016 年 10 月 27 日, 東北大学.
8. 船野敬, Estimates of ratios of consecutive eigenvalues of Laplacian via ham sandwich, young mathematicians seminar, 2016 年 6 月 17 日, Institut Fourier, Grenoble (フランス)
9. 船野敬, Estimates of eigenvalues of Laplacian by a reduced number of subsets, Geometry of Moduli Space of Low Dimensional Manifolds, 2015 年 12 月 15 日, 京都大学.
10. 船野敬, Estimates of eigenvalues of Laplacian by a reduced number of subsets, Yau's Student Seminar, 2015 年 11 月 20 日, Harvard university, Cambridge (アメリカ).
11. 船野敬, Some upper bound estimate of eigenvalues of Laplacian on Alexandrov spaces of $CD(0, \quad)$, Seminar with E. Milman, 2014 年 9 月 30 日, 京都大学.
12. 船野敬, ラプラシアンの固有値の評価と分布, Okayama Analysis and Probability Seminar, 2014 年 6 月 9 日, 岡山大学.
13. 船野敬, Eigenvalues of Laplacian and multi-way isoperimetric constants, 微分トポロジーセミナー, 2014 年 4 月 22 日, 京都大学.
14. 船野敬, リーマン多様体上のラプラシアンの固有値と多重等周定数について, 日本数学会春季分科会, 2014 年 3 月 16 日, 学習院大学
15. 船野敬, Eigenvalues of Laplacian and Multi-way isoperimetric constants on Riemannian manifolds, Working seminar "Courbure, transport optimal

et probabilités”, 2013 年 12 月 5 日,
Institut Henri Poincaré, Paris (フ
ランス).

16. 船野敬, Eigenvalues of Laplacian on
Riemannian manifolds of nonnegative
Ricci curvature, Mathematical
Seminar, 2013 年 12 月 3 日, Institut
des Hautes Études Scientifiques,
Paris (フランス).

17. 船野敬, Eigenvalues of Laplacian and
Multi-way isoperimetric constants on
Riemannian manifolds, Séminaire
d’Algèbres d’Opérateurs, 2013 年 10
月 24 日, Paris (フランス)

18. 船野敬, Eigenvalues of Laplacian and
Multi-way isoperimetric constants on
Riemannian manifolds, The Ninth
Geometry Conference for the
friendship between Japan and China,
2013 年 9 月 4 日, 登別グランドホテル

19. 船野敬, Eigenvalues of Laplacian and
Multi-way isoperimetric constants on
Riemannian manifolds III, Oberseminar
Geometric Analysis, 2013 年 7 月 16 日,
Bielefeld university, Bielefeld (ド
イツ)

20. 船野敬, Eigenvalues of Laplacian and
Multi-way isoperimetric constants on
Riemannian manifolds II, Oberseminar
Geometric Analysis, 2013 年 6 月 18 日,
Bielefeld university, Bielefeld (ド
イツ)

21. 船野敬, Eigenvalues of Laplacian and
Multi-way isoperimetric constants on
Riemannian manifolds I, Oberseminar
Geometric Analysis, 2013 年 5 月 13 日,
Bielefeld university, Bielefeld(ドイ
ツ)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
<https://sites.google.com/site/keifunano>
shomepage/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

船野 敬 (FUNANO KEI)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：40614144

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()

〔図書〕(計 0 件)