

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 11 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800051

研究課題名(和文) 高次コホモロジー群の漸近的不変量とその複素幾何学への応用

研究課題名(英文) Asymptotic Invariants of Higher Cohomology Groups and Applications to Complex Geometry

研究代表者

松村 慎一 (Matsumura, Shin-ichi)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90647041

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：代数幾何に自然に現れる高次コホモロジーの消滅定理を複素解析幾何の視点から研究し、より広いケーラー幾何の立場から特異計量付きの直線束に一般化した。具体的には、巨大な直線束の最小特異計量に対するNadel型のコホモロジー消滅定理を確立し、乗数イデアル層を用いて単射性定理を擬正な直線束に一般化した。また、固有なケーラー射に付随する高次順像を用いて、これらの結果を多様体の変形族にまで一般化した。その過程で、超越的な特異性を持つ特異計量/乗数イデアルを扱う技術、調和積分論/L2-理論の技術を発展させた。

研究成果の概要(英文)：From the viewpoint of complex analytic geometry, I studied vanishing theorems of higher cohomology groups that naturally appear in algebraic geometry, and generalized them to (holomorphic) line bundles with singular hermitian metrics. Specifically, I established a Nadel type vanishing theorem for singular hermitian metrics with minimal singularities on big line bundles, and I obtained injectivity theorems to pseudo-effective line bundles by using multiplier ideal sheaves. Furthermore, I generalized them to deformations of Kaehler varieties by using higher direct images. In the processes, I developed techniques of singular hermitian metrics and multiplier ideal sheaves with transcendental singularities and techniques of L2 methods for dbar-equations and the theory of harmonic integrals.

研究分野：複素幾何学

キーワード：ケーラー幾何理論 正値性 コホモロジー消滅定理 正則切断 特異計量 乗数イデアル層 調和積分論 dbar, L2-

1. 研究開始当初の背景

代数幾何や複素幾何において直線束(より一般に接続層)のコホモロジーは重要な役割を果たす。高次コホモロジーは(ひとつの見方として)局所的な現象を大域化する際の“障害”であると解釈できる。この高次コホモロジーの消滅定理は、曲率が正值な直線束(代数幾何の豊富な直線束に対応)に対する Kodaira の消滅定理を元にして、状況や目的に応じて様々な一般化や精密化がなされてきた。1980年代には、極めて重要な一般化である巨大な直線束に対する Kawamata-Viehweg の消滅定理や半豊富な直線束に対する Kollar の単射性定理が与えられた。1990年代には、(直線束の)特異エルミート計量、曲率カレント、乗数イデアルなどの概念が重要性を増し、Demailly, Nadel, Lazarsfeld 達の基礎的な研究を経て、複素幾何、代数幾何に著しい応用を与えるようになってきた。さらに、Birkar, Cascini, Hacon, McKernan の大結果により、標準束が適切な意味で“正值”の場合に極小モデル理論が完成し、“半正值”性や特異性の研究は重要性を増してきている。以上の状況から、Kollar の単射性定理の曲率カレントが半正な特異計量への一般化は自然な流れである。しかし、非代数的な特異性や曲率カレントが半正な特異計量を扱うには技術的な困難があり、Ohsawa, Fujino の先行研究があるだけのようにみえた。最小特異計量も同様の難しさを持っている。非代数的で特異性や曲率カレントが半正な計量を扱う技術を発展させ、これまでのコホモロジー理論を全て擬正な直線束に一般化することは自然で価値のあり、代数幾何、複素幾何への応用もあるようにみえた。

2. 研究の目的

本研究の大目標は、代数幾何で自然に現れる概念(コホモロジー、豊富性など)を複素幾何の立場(曲率、正值性など)から扱う枠組みの構築であった。具体的には、直線束の様々な正值性や豊富性を用いて高次コホモロジーの消滅定理を一般化すること、直線束の曲率の正值性と直線束のテンソル冪に関するコホモロジーの漸近的な挙動の関係を明らかにすること、その応用として豊富性(正值性)が多様体の幾何学や複素構造にどのように影響するかを明らかにすることを目指した。

3. 研究の方法

本研究では代数幾何に自然に現れるコホモロジーを複素解析、微分幾何の視点や方法を用いて研究した。擬正な直線束やその

正值性を複素幾何的に扱うために、(準)多重劣調和関数、特異エルミート計量、曲率カレント、(退化した)Monge-Ampere 積などを用いた。高次コホモロジーを調べるために、調和積分論、 $\bar{\partial}$ -微分方程式、 L^2 -理論などを用いた。また、非代数的な特異性を扱うために特異エルミート計量の Bergman 核による近似を積極的に用いた。さらに、乗数イデアル層と呼ばれる多重劣調和関数/特異エルミート計量の特異性を正則関数の L^2 可積分性で測る概念を用いて、従来の直線束の代わりに乗数イデアル層付きの接続層を考えることで、これまで研究を巨大な直線束や擬正な直線束に定式化、一般化した。代数幾何的には川又対数末端の特異点を持つ多様体(と因子の組)への一般化ともみなせる。本研究では代数幾何、複素幾何、複素解析などの幅広い分野の視点を必要とするので、関連分野の研究集会やセミナーに参加し、情報収集や研究討論を積極的に行うことで研究を推し進めた。

4. 研究成果

巨大な直線束の最小特異計量に対する Nadel 型のコホモロジー消滅定理を証明した。その証明の過程で、Bergman 核を用いた特異計量の近似を使って、調和積分論と L^2 -理論を組み合わせてコホモロジー類を調べる技術を与えた。その後、Guan-Zhou, Blocki により Ohsawa-Takegoshi の拡張の最良評価が証明され、その応用として Demailly-Kollar の乗数イデアル層に対する openness conjecture が解決され、この結果も既知の結果から従うこととなった。しかし、上述の消滅定理の証明はこの議論と異なり、半正な曲率カレントを持つ(非代数的な)特異計量を扱う技術を与えていた。

次に、この技術をさらに深化させ、乗数イデアル層を用いることで擬正な直線束に対する単射性定理を確立した。この結果は Kollar, Enoki, Fujino らの結果の一般化を与えている。その証明の過程で、 $\bar{\partial}$ -微分方程式の解のノルムを、Hörmander らによる L^2 -理論で得られる de Rham-Weil 同型を用いて Čech コホモロジーに帰着し評価する技術を与えた。また、乗数イデアル付きの直線束のテンソル冪に関するコホモロジーの漸近挙動の評価を得て消滅定理への応用を与えた。さらに、Gongyo と共同で、この単射性定理を極小モデル理論に現れる拡張定理に応用できる形に定式化し、双有理幾何学の切断の拡張問題への応用を与えた。

以上の結果の多様体の変形族への相対化を目指し、複素多様体から解析空間への固有な正則写像による高次順像を研究した。多様体のケーラー性と弱擬凸性および直線

束の曲率の適切な正值性の仮定の下で、高次コホモロジーに対する消滅定理を得た。この結果は Fujino の予想への解答であり、Ohsawa の結果の高次順像への一般化および Kollar の結果の複素幾何的な状況への一般化と見なせる。その証明の過程で、Takegoshi の正則凸多様体上の調和積分を応用することで、随伴束のコホモロジーのある種の分解定理を得た。代数幾何的な状況ではより強い導来圏内での分解定理が知られていたが、これは Fujisawa によって複素幾何的な状況へ一般化された。また、上述した単射性定理も高次順像を用いて多様体の変形族に一般化することに成功した。応用として、複素構造に変形に関する擬正な直線束の数値的小平次元の変動を調べることで、Nadel-Kawamata-Viehweg 型の消滅定理の相対化も与えた。さらに、Fujino と共同で、(準)多重劣調和関数とその部分多様体への制限について研究し、基底点自由な線形系と乗数イデアルに対する Bertini 型の定理を与えた。この定理はいくつかの論文では証明なしで使われていたが、厳密な証明を与えることが出来た。この定理によって乗数イデアルを次元に関する帰納法で調べることが可能になる。応用として Fujino と共同で、Kollar の捨れ不在定理、一様大域生成定理、GV 層性、Generic vanishing などの定理を擬正な直線束に一般化した。また、Cao, Demailly と共同で被約でない部分多様体からの正則切断の拡張定理についての研究した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① Yoshinori Gongyo, Shin-ichi Matsumura, "Versions of injectivity and extension theorems" to appear in Annales Scientifiques de l' Ecole Normale Supérieure, (2017), 査読有.

② Shin-ichi Matsumura, "An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves of singular metrics with transcendental singularities" to appear in Journal of Algebraic Geometry, 発行年未定, 査読有.

③ Shin-ichi Matsumura, "A vanishing theorem of Kollar-Ohsawa type" Mathematische Annalen, Volume 366 (2016), Issue 3, pp. 1451-1465, 査読有.

④ Shin-ichi Matsumura, "A Nadel vanishing theorem for metrics with minimal singularities on big line bundles."

Advances in Mathematics, Volume 280 (2015), pp. 188-207, 査読有.

⑤ Shin-ichi Matsumura, "A Nadel vanishing theorem via injectivity theorems" Mathematische Annalen, Volume 359 (2014), no. 4, pp. 785-802, 査読有.

⑥ Shin-ichi Matsumura, "Weak Lefschetz theorems and the topology of zero loci of ample vector bundles" Communications in Analysis and Geometry, Volume 22 (2013), no. 4, pp. 595-616, 査読有.

⑦ Shin-ichi Matsumura, "Asymptotic cohomology vanishing and a converse to the Andreotti-Grauert theorem on surfaces" Annales de l' Institut Fourier, Volume 63 (2013), no. 6, pp. 2199-2221, 査読有.

⑧ Shin-ichi Matsumura, "Some applications of the theory of harmonic integrals" Complex Manifolds, Volume 2 (2015), pp. 16 - 25, the Proceeding of Workshop Complex Geometry and Lie groups in Torino, 査読有.

⑨ Shin-ichi Matsumura, "コホモロジーの消滅定理と単射性定理について" 城崎シンポジウムの報告集. (2015 年度 城崎代数幾何シンポジウム, 2015 年 10 月).

⑩ Shin-ichi Matsumura, "Injectivity theorems with multiplier ideal sheaves and their applications" Recent developments in Complex Analysis and Geometry, Volume 144 of the series Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, (2015), pp. 241 -255, the Proceeding of the 10-th Korean Conference on Several Complex Variables as a satellite conference to Seoul ICM (International Congress of Mathematicians).

[学会発表] (計 40 件)

① Shin-ichi Matsumura, "Injectivity theorems with multiplier ideal sheaves for higher direct images", The 12th Algebraic-Analytic-Geometry seminar, Kagoshima University, Kagoshima, 2017 年 2 月.

② Shin-ichi Matsumura, "超越的な手法を用いた小平の消滅定理に一般化について" 日本数学会 秋季総合分科会, 函数論分科会 特別講演, 関西大学, 2016 年 9 月.

③ Shin-ichi Matsumura, "Versions of injectivity and extension theorems" Seminar of Centar for Geometry and its Applications, Pohang University of Science and Technology, Korea, 2016年9月.

④ Shin-ichi Matsumura, "Injectivity theorem with multiplier ideal sheaves for higher direct images under Kahler morphisms", The KSCV Symposium #11: International conference on Complex Analysis and Geometry, Kolon Hotel in Gyeong-Ju, 2016年7月.

⑤ Shin-ichi Matsumura, "An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves for higher direct images under Kahler morphisms", Kinoshita symposium on algebraic geometry 2015, Hyogo, 2015年10月.

⑥ Shin-ichi Matsumura, "Versions of injectivity and extension theorems" Princeton-Tokyo workshop on Geometric Analysis, Tokyo, 2015年3月.

⑦ Shin-ichi Matsumura, "Versions of injectivity theorems and extension theorems" Seminaire d'Analyse et Geometrie, Paris in France, 2015年2月.

⑧ Shin-ichi Matsumura, "Versions of injectivity theorems and extension theorems" Algebraic geometry seminar, Imperial college London in London, 2015年1月.

⑨ Shin-ichi Matsumura, "Versions of injectivity theorems and extension theorems" Symposium on Complex Geometry, National Research University Higher School of Economics in Moscow, 2014年11月.

⑩ Shin-ichi Matsumura, "Injectivity theorems with multiplier ideal sheaves and its applications", The KSCV Symposium #10: International conference on Complex Analysis and Geometry, Satellite Conferences of ICM(International Congress of Mathematicians) as invited 1-hour speaker, Kolon Hotel in Gyeong-Ju, 2014年8月.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者
松村 慎一 (MATSUMURA Shin-ichi)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90647041

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし

(4) 研究協力者
権業 善範 (GONGYO Yoshinori)
東京大学・大学院数理学研究科・准教授
研究者番号: 70634210

藤野 修 (FUJINO Osamu)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60324711

CAO Junyan
Institut de Mathematiques de Jussieu,
Analyse complexe et geometrie, Universite
Paris 6

DEMAILLY Jean-Pierre
Institut Fourier, Laboratoire de
Mathematiques