様　式　C−19、F−19−1、Z−19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 5 月 23 日現在

機関番号：１５３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８０００５４

研究課題名（和文）確率微分方程式とマリアヴァン解析の新展開

研究課題名（英文）Novel development on stochastic differential equations and Malliavin calculus

研究代表者
楠岡　誠一郎（Kusuoka, Seiichiro）

岡山大学・異分野基礎科学研究所・准教授

研究者番号：２０６４６８１４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：係数の連続性が悪い場合の確率微分方程式の解の推移確率密度関数の初期値と密度の変数に関する連続性についての研究を行い、係数の連続性に非常に弱い仮定しか与えなくても初期値に関するヘルダー連続性が得られることが分かった。また密度の変数に関しても係数に対する弱い仮定の下で、ドリフト項が無い場合とほぼ同程度の連続性を持つという結果を得た。この推移確率密度関数の連続性は２階線形放物型偏微分方程式の基本解の空間変数に対する連続性に対応している。その他にもランダム環境中のブラウン運動の再帰性や、マリアヴァン解析とシュタインの手法を用いた確率変数列の分布の収束に関する結果を得た。

研究成果の概要（英文）：I studied the continuity in the initial value and the parameter of the density component of the transition probability density function of the solutions to stochastic differential equations with non-regular coefficients, and obtained the Hoelder continuity in the initial value under a very weak assumption on the coefficients. Moreover, I obtained the continuity which is the almost same level as that of the equation without drift term in the parameter of the density component under a weak asummption on the coefficients. The continuity of the transition probability density function is associated with the continuity in the space parameters of the fundamental solutions to second-order parabolic partial differential equations. Besides, I also obtained some results on the recurrence of the Brownian motion in random environments, and on the convergence of the distributions of random variables by Malliavin calculus and Stein's method.

研究分野：確率解析

キーワード：確率微分方程式　マリアヴァン解析　推移確率密度関数　放物型偏微分方程式　基本解　ヘルダー連続性　ランダム環境　シュタインの手法

１．研究開始当初の背景

　確率微分方程式は伊藤清氏によって導入されて、解の存在や一意性、その挙動など様々な研究がなされてきた。その後、解の分布の密度関数の滑らかさを調べる手法として、マリアヴァン解析が誕生し、これらの豊富な理論により確率解析学として数学の一つの分野となるに至った。近年ではより一般の確率微分方程式に対する研究がなされ、特に係数がリプシッツ連続でないような確率微分方程式に対してマリアヴァン解析を適用しようという試みなどがなされるようになった。また、マリアヴァン解析とシュタインの手法を融合し、確率変数列の分布の収束の速さをマリアヴァン解析を用いて調べるといった新しい方向の研究も現れるようになっていた。

２．研究の目的

本研究では係数が悪い場合の確率微分方程式の解の、推移確率密度関数の滑らかさといった挙動の解明を目的とする研究を行った。しかし、単に係数が悪い場合というだけでは枠組みが広く統一的に議論することができないため、次の様に幾つかの場合に分けて研究を行った。それぞれについて以下で述べる。

(1)　確率微分方程式と２階線形放物型偏微分方程式の間には対応関係があり、それぞれに対して方程式の解の滑らかさを調べる手段が存在する。しかし、偏微分方程式の手法では係数に対して、ヘルダー連続といったリプシッツ連続よりも弱い連続性を仮定した下で基本解の連続性の度合いに関する結果があるのに対し、確率解析的手法では係数がリプシッツ連続でないとマリアヴァン解析がうまく機能しないため、このような場合に基本解に対応する推移確率密度関数の連続性の度合いを調べる方法が無かった。そこで、係数の滑らかさが悪い確率微分方程式の推移確率密度関数の連続性の度合いを確率解析的手法で調べ、新しい計算手法を確立するとともに、確率解析的手法の利点を生かし、偏微分方程式論では扱いづらい放物型方程式の基本解の連続性の度合いを調べることを目的とした研究を行った。

(2)　ランダム環境中のブラウン運動の挙動についての研究も行った。これもまた係数が悪い場合の確率微分方程式を考えることに対応し、解の挙動を調べる新しい確率解析的手法を確立することを目的とした。

(3)　マリアヴァン解析を用いた確率変数列の収束についての研究も行った。既存の結果をより明確にし、確率微分方程式の解の収束をマリアヴァン解析を用いて調べることによって、確率微分方程式の解の挙動を解析することを目的とした。

３．研究の方法

研究の目的に記載したそれぞれの問題について研究の方法を以下で述べる。

(1)　２階線形放物型偏微分方程式に対応する確率微分方程式の推移確率密度関数の連続性についての研究では、初期値に関する連続性と密度の変数に関する連続性の度合いに関する研究を行った。推移確率密度関数の初期値に関する連続性では、カップリングの手法を用いた。ここで用いたカップリングの手法は２つの初期値に対する確率微分方程式の解に対し、確率微分方程式を駆動するブラウン運動を、２つの解が互いに衝突し易くなるように選ぶというものである。確率微分方程式の解には強マルコフ性があるので、衝突後の２つの解の挙動はその時刻以降の密度関数の値に差を生じさせない。このことから２つの解の衝突時刻の評価から解の密度関数の初期値に関する連続性が得られると考えた。衝突時刻の評価は１次元拡散過程の理論を用いて行った。また、推移確率密度関数の密度の変数に関する連続性は摂動の手法を用いて研究を行った。摂動の手法は作用素論においてよく知られた手法であるが、この研究では確率解析学で知られるギルサノフ変換した方程式を摂動とみなして密度関数の評価を行った。

(2)　ランダム環境中のブラウン運動の挙動の研究では、主な手法として市原テストを用いて再帰性及び過渡性について研究を行った。市原テストはディリクレ形式の理論でよく知られた手法であり、ランダム環境の解析と相性の良いものであると考えこの手法を用いた。これにより、ランダム環境が作るポテンシャル関数が帯状の領域で十分高い壁のようなものを作る場合に再帰的になることがわかる。さらに、環境が十分高い壁を作るかどうかについては、環境がガウス型であるときはその再生核ヒルベルト空間の構造から判別することを試みた。

(3)　マリアヴァン解析を用いた確率変数列の収束についての研究では、近年新しい話題として現れた、シュタインの手法とマリアヴァン解析を融合した議論を用いた。これにより、抽象的ではあるものの、確率変数の分布の間の距離をマリアヴァン微分などを用いて評価することができ、それにより確率変数列の分布の収束を示すことができる。これに関数解析的手法を用いてより詳しく評価を調べることにより、分布の収束の研究を行

った。

４．研究成果

研究の目的・方法に記載したそれぞれついて研究成果を以下で述べる。尚、以下の成果は全て論文としてまとめた。これらの一部は既に学術雑誌に掲載され、その他のものは掲載決定済みではあるものの掲載待ちとなっている。

(1) カップリングの手法を用いて確率微分方程式の推移確率密度関数の初期値に関する連続性について研究を行った結果、拡散係数が非退化で有界連続、ドリフト項の係数が有界可測という条件の下で、初期値に関する任意の指数でのヘルダー連続性が得られた。これはカップリングによる２つの解の衝突が起こるためには、拡散係数の非退化性と有界連続性、ドリフト項の係数の有界性があれば良いということと、１次元拡散過程の理論の類似の議論することにより、衝突が起こるならばリプシッツ連続に近い連続性が得られたことによる結論である。拡散係数にディニ連続性を仮定すると、推移確率密度関数の初期値に関するリプシッツ連続性も得られることが分かった。さらに、この議論は確率解析的な手法を用いているため、係数が時間パラメータに依存していても良く、偏微分方程式論で知られている結果とは少し違う形の結論が得られた。また、摂動の手法を用いた推移確率密度関数の密度の変数に関する連続性は、初期値に関する連続性を得る際の仮定に加えて拡散係数に連続性に関する複雑な仮定をした下で、ドリフト項が無い場合の方程式の解の密度関数の連続性の度合いが、ドリフト項がある場合の方程式の解にほぼ受け継がれることが分かった。また、ギルサノフ変換自体は経路依存型確率微分方程式に対しても適用可能であるので、推移確率密度関数の密度の変数に関する連続性の結果は経路依存型確率微分方程式の解に対しても同様に成り立つことが分かった。これらの成果は当初の目的であった、マリアヴァン解析が適用できないような確率微分方程式に対しても確率解析の手法を用いて推移確率密度関数の連続性を達成したものである。これらにより、偏微分方程式論で知られている基本解の滑らかさに関する結果と似た結果を、対応する確率微分方程式の推移確率密度関数に対して確率解析を用いて得られることが分かった。

(2) ランダム環境中のブラウン運動の再帰性について、市原テストとガウス型確率変数族の理論を用いて研究した結果、環境のガウス型確率変数族の共分散への条件のみから、帯状領域で十分高い壁を作ることや環境のエルゴード性が得られることが分かった。この条件は非常に明確な形で書かれており、これまで知られていた具体例の枠組みを大きく拡張するような成果が得られた。環境がガウス型でなくレヴィ過程から生成されるような場合についても研究を行い、こちらも既存の１次元空間の場合の結果を拡張するような成果が得られた。

(3) マリアヴァン解析を用いた確率変数列の収束についての研究では、その確率変数列に対応する確率測度と収束先の確率変数に対応する確率測度の間の全変動と、シュタインの手法とマリアヴァン解析を融合した際に現れるシュタイン因子と呼ばれる量の間の関係が得られた。研究成果ではこれらの間の上下からの評価が得られており、これによりこの研究の枠組みにおいてはシュタイン因子の収束と全変動ノルムでの収束の同値性が得られた。以上の様な形で、抽象的なシュタイン因子の収束がどの程度の強さを持つ収束であるかが分かった。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１１件）

(1) Seiichiro Kusuoka and Ciprian Tudor, Characterization of the convergence in total variation and extension of the Fourth Moment Theorem to invariant measures of diffusions, Bernoulli, 掲載決定済. (査読有)

(2) Seiichiro Kusuoka, Hölder and Lipschitz continuity of the solutions to parabolic equations of the non-divergence type, Journal of Evolution Equations, 掲載決定済. (査読有)

(3) Shigeki Aida, Takanori Kikuchi and Seiichiro Kusuoka, The rates of the L^p -convergence of the Euler-Maruyama and Wong-Zakai approximations of path-dependent stochastic differential equations under the Lipschitz condition, Tohoku Mathematical Journal, 掲載決定済. (査読有)

(4) Seiichiro Kusuoka, Continuity and Gaussian two-sided bounds of the density functions of the solutions to path-dependent stochastic differential equations via perturbation, Stochastic Processes and their Applications, Vol.

127, No. 2 (2017), 359-384. (査読有)

(5) Seiichiro Kusuoka, Hiroshi Takahashi and Yozo Tamura, Recurrence and transience properties of multi-dimensional diffusion processes in selfsimilar and semi-selfsimilar random environments, Electronic Communications in Probability, Vol. 22 (2017), paper no. 4, 1-11. (査読有)

(6) Seiichiro Kusuoka, Hiroshi Takahashi and Yozo Tamura, Recurrence of the Brownian motion in multidimensional semi-selfsimilar environments and Gaussian environments, Potential Analysis, Vol. 43, No. 4 (2015), 695-705. (査読有)

(7) Seiichiro Kusuoka, Hölder continuity and bounds for fundamental solutions to non-divergence form parabolic equations, Analysis & PDE, Vol. 8, No. 1 (2015), 1-32. (査読有)

〔学会発表〕(計２８件)

(1) Seiichiro Kusuoka, Continuity and Gaussian two-sided bounds of the density functions of the solutions to path-dependent stochastic differential equations via perturbation, 福岡大学確率論研究集会, 福岡大学(福岡県・福岡市), 2016 年 8 月 4 日.

(2) Seiichiro Kusuoka, A stochastic approach to the Hölder and Lipschitz continuity of the solutions to nondivergence form parabolic equations, 保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性, 特異性および長時間挙動の研究, 京都大学(京都府・京都市), 2016 年 6 月 7 日.

(3) Seiichiro Kusuoka, Equivalence between the convergence in total variation and that of the Stein factor to the invariant measures of diffusion processes, Stochastic Analysis and Statistics 1, 東京大学(東京都・目黒区), 2016 年 4 月 22 日.

(4) 楠岡誠一郎, 確率解析を用いた非発散放物型方程式の解と基本解へのアプローチ, 日本数学会 2016 年度年会, 筑波大学(茨木県・つくば市), 2016 年 3 月 16 日.

(5) 楠岡誠一郎, マルコフ型確率微分方程式の経路依存型ドリフト項による摂動, 広島・岡山解析確率論セミナー, 広島大学(広島県・東広島市), 2016 年 2 月 22 日.

(6) Seiichiro Kusuoka, Continuity and Gaussian two-sided bounds of the density functions of the solutions to path-dependent stochastic differential equations via perturbation, 新潟確率論ワークショップ, 新潟大学(新潟県・新潟市), 2016 年 1 月 22 日.

(7) Seiichiro Kusuoka, The rates of the L^p -convergence of the Euler-Maruyama and the Wong-Zakai approximations of path-dependent stochastic differential equations under the Lipschitz condition, 確率解析とその周辺, 大阪大学(大阪府・豊中市), 2015 年 10 月 21 日.

(8) Seiichiro Kusuoka, Continuity and bounds of the transition density functions of the solutions to path-dependent stochastic differential equations, German-Japanese conference on Stochastic Analysis and Applications, 東北大学(宮城県・仙台市), 2015 年 9 月 4 日.

(9) Seiichiro Kusuoka, Continuity and bounds of the transition density functions of the solutions to path-dependent stochastic differential equations, International Conference on Stochastic Analysis and Related Topics, 武漢市(中国), 2015 年 8 月 5 日.

(10) Seiichiro Kusuoka, Continuity and bounds of the transition density functions of the solutions to path-dependent stochastic differential equations, New Trends in Stochastic Analysis, 国際高等研究所(京都府・木津川市), 2015 年 7 月 6 日.

(11) Seiichiro Kusuoka, Hölder and Lipschitz continuity of the solutions to parabolic equations of non-divergence type, EPFL seminar, ローザンヌ(スイス), 2015 年 2 月 17 日.

(12) 楠岡誠一郎, Hölder and Lipschitz continuity of the solutions to parabolic equations of non-divergence type, 偏微分方程式に付随する確率論的問題, 京都大学(京都府・京都市), 2014 年 9 月 18 日.

(13) Seiichiro Kusuoka, Hölder and Lipschitz continuity of the solutions to parabolic equations of non-divergence type, UK-Japan Stochastic Analysis School, コヴェントリー(イギリス), 2014 年 9 月 1 日.

(14) Seiichiro Kusuoka, Hölder and Lipschitz continuity of the solutions to parabolic equations of non-divergence type, Stochastic Processes, Analysis and Mathematical Physics, 関西大学(大阪府・吹田市), 2014 年 8 月 28 日.

(15) Seiichiro Kusuoka, Hölder and Lipschitz continuity of the solutions to parabolic equations of non-divergence type, 7th International Conference on Stochastic Analysis and its

Applications, ソウル(韓国), 2014 年 8 月 11 日.

(16) 楠岡誠一郎, ピン止め拡散過程と滑らかさの悪い係数を持つ放物型方程式の基本解のヘルダー連続性, 確率解析とその周辺, 京都大学(京都府・京都市), 2013 年 9 月 21 日.

(17) Seiichiro Kusuoka, Pinned diffusion processes and Hölder continuity of the fundamental solutions to parabolic equations with irregular coefficients, German-Japanese Meeting on Stochastic Analysis, ライプツィヒ(ドイツ), 2013 年 9 月 10 日.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.cc.okayama-u.ac.jp/~kusuoka/

６．研究組織

(1)研究代表者
楠岡　誠一郎　(KUSUOKA SEIICHIRO)
岡山大学・異分野基礎科学研究所・准教授
研究者番号：20646814

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし