科研費

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号: 13601 研究種目: 若手研究(B) 研究期間: 2013~2016

課題番号: 25800061

研究課題名(和文)量子系の条件付き対称完全正作用素値測度に関する研究

研究課題名(英文)Study of Conditional SIC-POVM

研究代表者

大野 博道 (OHNO, Hiromichi)

信州大学・学術研究院工学系・准教授

研究者番号:90554585

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文):量子状態を観測する場合,観測には正作用素値測度が用いられるが,観測により量子状態の情報を完全に知ることができ,かつ最も効率の良い正作用素値測度として,SIC-POVM(対称完全正作用素値測度)が知られている.本研究では観測する量子状態の情報の一部が既知である場合に,最も効率の良い観測が行える正作用素値測度である条件付きSIC-POVMについて研究を行い,条件付きSIC-POVMが存在するための必要条件と,いくつかの例を構成した.

研究成果の概要(英文): The state of a quantum system is a density matrix with several parameters. The concern is how to recover the parameters. Several possibilities exist for the optimal recovery method, and we consider some special cases. We assume that a few parameters are known and that the others are to be recovered. The optimal positive operator valued measure (POVM) for recovering unknown parameters with an additional condition is called a conditional symmetric informationally complete POVM (SIC-POVM). We study the existence or nonexistence of conditional SIC-POVMs. We provide a necessary condition for existence and some examples.

研究分野: 量子情報理論

キーワード: 量子情報理論 量子トモグラフィー

1.研究開始当初の背景

量子とは、物質の最小単位を表すものであり、例として電子や光子などが挙げられる.量子系とは、この量子を数学的に表す枠組みであり、具体的にはヒルベルト空間上の有界線型作用素のなす環で表されている.特によるであるときには、サインルト空間が有限次元であるときには、量子系は行列環で表されている.この量子状態を観測するための手段として、MUB(mutually unbiased bases)と SIC-POVM があり、これまでこの 2つの完全正作用素値測度の研究が多く行われてきた.

MUB はヒルベルト空間の正規直交基底の集合で,異なる基底に属するベクトルの内積の絶対値が特定の値をとるもののことである.ヒルベルト空間の次元 d に対し,MUB の基底の個数が d+1 個であるとき,その MUB からられており,ヒルベルト空間の次元は 1980 年代に多く大力れており,ヒルベルト空間の次元はが素数のべき乗の場合には,d+1 個の基底を持つの本では、dが存在することが知られている.一方でなけ、かられているが表数のであるが,予想ではその個数は d+1 個決であるが,外UB から作られる完全正作用素値測度が存在しないとされている.

ヒルベルト空間の次元が素数のべき乗で ない場合には,MUB から作られる完全正作用 素値測度が存在しないという予想を受けて, MUB とは異なる方法で完全正作用素値測度を 構成する方法が考えられた. それが 2000 年 ごろから研究されている SIC-POVM である. SIC-POVM は d 次元ヒルベルト空間における d^2 個のベクトルの集合で, どの 2 つのベク トルの内積の絶対値も同じ値をとるもので ある .SIC-POVM は現在までにヒルベルト空間 の次元が 15 次元以下の場合には存在するこ とが知られており、またコンピュータによる 解析で,60次元程度までは存在すると予想さ れている、そのため、全ての次元において SIC-POVM が存在することが期待されている が、今のところまだ SIC-POVM の存在は証明 されてはいない.

SIC-POVM は量子状態を最も効率よく観測する完全正作用素値測度として知られているが,それ以外にも量子情報分野への応用が数多く期待できる.例えば量子暗号において,もっとも盗聴され難い暗号を作る場合,このSIC-POVMが必要となる.

一方で、SIC-POVMは数学の他の分野とも繋がりが深い、例えば、ベクトルの内積という点に注目すれば、frame 理論に結び付くし、ベクトルの幾何的な構造に注目すればdesign理論に結び付く、また、ベクトルから構成される射影作用素や、ベクトルを写すユニタリ作用素を考えれば、作用素論・作用素

環論との繋がりもある.このように量子情報の分野だけでなく,数学的にも非常に意義のある研究である.

この SIC-POVM を一般化し,観測する量子状態の情報がある程度既知である場合に拡張したものが条件付き SIC-POVM である.SIC-POVM は量子状態の情報を全て知ることのできる完全正作用素値測度であるので,情報がある程度既知の量子状態を SIC-POVM で観測すると,すでに知っている情報も得ることになってしまうため,無駄が生じてしまう.このような無駄が出ないように考えられたのが条件付き SIC-POVM である.条件付き SIC-POM は 2012 年 Petz , Ruppert により考案され,今後の研究が期待されている.

2.研究の目的

条件付き SIC-POVM の研究は新しい研究であるため,まだ知られている例が少なく,応用上有用な場合についても,その存在や構成方法などがわかっていない.そのため,まずは条件付き SIC-POVM の具体例を多く作りたい.特に,2 つの量子系の結合系の,部分系の片方あるいは両方の情報がわかっている場合や,正規直交基底による観測結果が得られている場合など,応用上有用なものについて調べたい.

次に,得られた例をもとにして,条件付き SIC-POVM が存在するための必要条件,十分条 件を調べたい .SIC-POVM の研究の難しさの原 因の一つは、扱わなければいけない変数が非 常に多いことである. 例えば 4 次元のヒルベ ルト空間上で SIC-POVM を作る場合, 4×4行 列が 16 個必要になるため,単純に考えれば 変数が256個必要になり,例を一つ作りだす だけでも膨大な時間がかかってしまう.(も ちろん,与えられた条件から変数は多少減る のだが.)条件付き SIC-POVM についても同 様の難しさがあり、ヒルベルト空間の次元が 高くなると,計算によって求めることはかな り難しくなる. そのため, このような難しさ が表れないような十分条件や必要条件を見 つけたい.さらに,十分条件が満たす場合に はその構成方法を確立し,また,必要条件を 満たさない場合は,条件付き SIC-POVM に代 わる,量子状態の観測に最も効率のよいPOVM を構成したい.

条件付き SIC-POVM の研究は,量子情報の分野への応用が数多く期待できる.例えば,この条件付き SIC-POVM は観測する量子状態がある程度既知である場合に,もっとも効率の良い完全正作用素値測度を与えるものであるので,量子状態の観測に用いる具体的な観測方法を与えることができる.またSIC-POVM が量子暗号分野において,最も盗聴に強い通信方法を与えるものであるため,条件付き SIC-POVM も特定条件下で最も盗聴に強い通信方法を与えることが期待される.

また SIC-POVM は条件付き SIC-POVM に含まれるため, 本研究から SIC-POVM の存在につ

いての結果が得られる可能性は高い. SIC-POVM の存在が証明されれば,数学においても,design 理論における未解決問題である2-design の存在や,frame 理論における未解決問題である(ある条件の下での)tight frame の存在が証明されることとなる.また作用素環論においても,部分環同士のcomplementary やangle と呼ばれる関連性の解析や,Generalized Pauli group やクリフォード群(Clifford group)といったいくつかのユニタリ部分群の解析など,多くの応用が期待できる.

3.研究の方法

これまで、SIC-POVMの研究は数多く行われており、15次元以下のヒルベルト空間ではSIC-POVMが存在することが知られている。またコンピュータによる解析で、60次元程度までは存在すると予想されている。一方で条件付きSIC-POVMは2012年にPetz、Ruppertにより提唱された(Petz、Ruppert、J. Phys. A、45、2012)新しい概念であるため、知られている例は多くない。上記の論文においてPetz、Ruppertにより、量子状態の対角成分が既知である場合の条件付きSIC-POVMが構成されたが、実際に構成するためにはヒルベルト空間の次元にも条件が必要となっている。

本研究では,まず条件付き SIC-POVM の具体例について,その存在の有無や構成方法について調べた.例えば,2 つの量子系の結合系上の量子状態を2つの部分系に制限した場合の,片方または両方の情報が既知である場合,2 つの部分系の量子状態が単位行列と場合,2 つの部分系の量子状態が単位行列と場合、1 いくつかの正規直交系による観測結果がわかっている場合といった,他の POVM による観測結果がわかっている例など,量子情報理論での応用上特に有用と思われるものについて研究を行った.

さらに,条件付き SIC-POVM が存在するための必要条件について研究を行った.量子状態のどの情報が既知であれば,残りの情報を知るための条件付き SIC-POVM の構成が可能なのか,あるいは不可能なのかということについて研究を行った.

4. 研究成果

本研究の成果として,まずいくつかの条件付きSIC-POVMの例を構成することができた.例えば,対角成分が既知である量子状態について,その情報を完全に知ることができる最も効率の良い条件付き SIC-POVM を低次元の場合に,具体的に構成した.

また,条件付き SIC-POVM が存在するための必要条件の一つを明らかにした.これを用いて,高次元の対角成分が既知である量子状態を観測する条件付き SIC-POVM, MUB を補完する条件付き SIC-POVM, 縮約状態にある種の

条件を課した量子状態を観測する条件付き SIC-POVM などについて考察した.その結果,縮約状態にある種の条件を課した量子状態を観測する条件付き SIC-POVM が存在しないことを示すことができた.これまでの正作用素値測度の研究では,非存在を証明した研究結果は非常に少なく,しかも,この数少ない非存在の証明のほとんどは,低次元の場合のものであった.本研究の非存在の証明は,任意の次元において行われているため,これまでの研究に照らし,とても重要な結果である.

また,本研究では量子情報理論と関わりの深い量子ウォークについても研究を行った.特に,量子ウォークのユニタリ同値性とSzegedyウォークに関する研究を行い,ユニタリ同値により不変である量子ウォークの性質と,Szegedyウォークになるための必要十分条件を明らかにした.

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に は下線)

〔雑誌論文〕(計3件)

Yasumichi Matsuzawa, <u>Hiromichi Ohno</u>, Akito Suzuki, Tatsuya Tsurii, Satoe Yamanaka, Non-commutative hypergroup of order five, Journal of Algebra and Applications, 查読有,印刷中,DOI: 10.1142/S0219498817501274.

<u>Hiromichi Ohno</u>, Unitary equivalent classes of one-dimensional quantum walks, Quantum information Processing, 查読有, 15, 2016, 3599-3617.

<u>Hiromichi Ohno</u>, Denes Petz, Examples of conditional SIC-POVMs, Quantum information Processing, 査読有, 14, 2015, 3983-3999.

[学会発表](計7件)

大野博道,1次元量子ウォークのユニタリ 同値性について,日本数学会2016年度秋季 総合分科会,2016年9月15日-18日,関西 大学(大阪府吹田市)

Hiromichi Ohno, Unitary equivalent classes of one-dimensional quantum walks, RIMS 研究集会「作用素環論の最近の進展」,2016年9月12日-14日,京都大学(京都府京都市)

大野博道,条件付き SIC-POVM とその例,作用素論・作用素環論研究集会,2015 年 10月 24日 - 26日,KKR 妙高高原白樺荘(新潟県妙高市)

Hiromichi Ohno, Existence of conditional SIC-POVM, Workshop on Quantum Information Theory and Related Topics, 2015年9月1日-3日, Hanoi(Vietnam)

<u>Hiromichi Ohno</u>, A new approach to quantum state tomography, Workshop on quantum information theory and related topics, 2014 年 9 月 4 日 - 6 日,立命館大学(滋賀県草津市)

Hiromichi Ohno, Necessary condition for existence of conditional SIC-POVM, RIMS 研究集会「不確実さと曖昧さの数理」, 2014 年 1 月 8 日 - 10 日,京都大学(京都府京都市)

Hiromichi Ohno, Examples of conditional SIC-POVM, The first international workshop on quantum information theory and related topics, 2013年8月19日-21日, Da Nang(Vietnam)

〔その他〕

ホームページ等

http://soar-rd.shinshu-u.ac.jp/profile/ ja.yFTmbpkh.html

6. 研究組織

(1)研究代表者

大野 博道 (OHNO, Hiromichi) 信州大学・学術研究院工学系・准教授 研究者番号:90554585