

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 18 日現在

機関番号：17701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800062

研究課題名(和文)表現論, ランダム行列とその周辺の研究

研究課題名(英文)Representation theory, random matrices, and related topics

研究代表者

松本 詔(Matsumoto, Sho)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：60547553

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：様々なランダム行列の行列要素の混合モーメントを計算する手法である、Weingarten calculus の発展と整備に貢献した。具体的に、7系列の古典型コンパクト対称空間から自然に定まるランダム行列、複合Wishart行列の逆行列、Ginibre行列の擬似逆行列に対して、Weingarten calculusを構成した。それ以外に、Jack多項式を通じた円アンサンブルのトレースの新しい不等式評価、その応用としての中心極限定理、ストリクトな分割の上のPlancherel平均に対する、ある条件下での多項式性の証明を行なった。

研究成果の概要(英文)：We have developed Weingarten calculus, which is a method for computing mixed moments of matrix elements from various random matrices. Specifically, we construct Weingarten calculus for random matrices associated with seven kinds of compact symmetric spaces, inverses of compound Wishart matrices, and pseudo-inverses of Ginibre matrices. Furthermore, we obtain a new inequality for traces from circular beta-ensembles by using Jack polynomials, and show the central limit theorem as its application. Also, we find a polynomiality of Plancherel averages.

研究分野：確率論

キーワード：確率論 表現論 組合せ論

## 1. 研究開始当初の背景

GUEはランダム行列論における代表的な行列モデルの一つである。GUE 行列の固有値の振舞いは古くから研究され、特に相関関数が行列式で表されることがよく知られている。さらにその結果から、行列のサイズ  $N$  を大きくしていくときの漸近的な挙動が、sine 核の行列式で記述されることなどが分かる。

近年のランダム行列論における固有値分布の研究において、ある種の「普遍性」が注目されている。Wigner エルミート行列は、行列要素が独立同分布となるランダム行列である。GUE は特にその分布が正規分布であるようなものごとである。「普遍性」とは、Wigner エルミート行列の固有値の漸近的な振舞いが行列要素の分布に依らずに GUE のそれと一致する、という現象のことである。

ランダム行列論は、しばしば表現論と密接な関連を持つ。例えば、ユニタリ群の Haar 測度に従うランダム・ユニタリ行列が代表格である。これらのランダム行列モデルは、群の作用などの不変性によって大域的に確率測度が与えられているため、行列要素が互いに強い相関を持っており、行列要素が独立であった Wigner 行列とは事情が異なっている。したがってこの場合、行列要素の分布自体が研究対象になりうる。Benoit Collins は 2003 年以降、Haar ユニタリ行列において、行列要素の混合モーメントを計算する手法を確立した。それらモーメントはユニタリ Weingarten 関数と呼ばれる対称群上の関数を用いて記述され、この手法は Weingarten calculus と呼ばれ浸透しつつある。研究代表者自身もこの Weingarten calculus の発展に寄与していた。特に、表現論や組合せ論を用いた手法による研究を行っていた。

## 2. 研究の目的

ランダム行列理論と、それに関連した問題に取り組む。表現論と密接に関わっているランダム行列モデルに置いて、行列要素の分布の研究は近年 Weingarten calculus によって大きく発展している。この理論において、いくつかの統計的量の相関が、組合せ論的または表現論的に記述される。その発展に今後も寄与し、理論の整備と応用に取り組む。また、ランダム行列と幾つかの類似の結果が見られる 2 つの対象物を研究する。1 つ目はランダム分割であり、ランダム行列との比較の下で、ある種の普遍性は存在するのか、という問題に挑む。2 つ目はランダム解析関数であり、その零点分布を具体的に記述することで、こちらランダム行列との比較や普遍性の観察を行う。

## 3. 研究の方法

本研究課題は、確率論と表現論の両方の知見を多く用いる。過去の研究で得られた古典群に対する Weingarten calculus が本研究の基本的な道具である。本研究課題の特色の一つとして、Weingarten calculus に登場する Weingarten 関数を表現論、特に対称群の調和解析を活用して理解することが挙げられる。また Jack 多項式、Schur  $Q$ -関数などの多変数直交対称関数を用いる。

## 4. 研究成果

コンパクト対称空間上の Weingarten calculus:

Weingarten calculus は、古典型コンパクト・リー群、特にユニタリ群、実直交群、斜交群上の Haar 測度に関する多項式積分を記述する。これらを「古典型コンパクト対称空間」まで拡張したのがここでの結果である。それらの対称空間は、7 系列(AI, AII, AIII, BDI, CI, CII, DIII)に分類されることがよく知られている。AI に対応するランダム行列は COE と呼ばれ、重要な行列モデルの一つである。本研究の前に、既に COE の Weingarten calculus は完成していた。それを他のすべての系列に拡張することができた。

それぞれの 7 系列 Weingarten 関数がどのような形で表すことができるかどうかは興味深い問題であったが、本研究で明示的なフーリエ展開を得ることができた。特に、いくつかの系列では他の種類の Weingarten 関数と一致する現象が観察された。この現象はより本質的な説明が期待されるが、それは今後の研究課題である。

ある種の不変性を持つランダム行列の Weingarten calculus:

Weingarten calculus の拡張の一つの方向として、ユニタリ両側不変性、もしくはユニタリ群の共役作用による不変性を持つようなランダム行列について、Weingarten calculus を構成した。それらの Weingarten 関数は、二つのパラメータを持つように拡張されたものとなることが分かった。

またその応用として、Ginibre ランダム行列の擬似逆行列、複合逆 Wishart 行列について、Weingarten calculus を展開することができた。すなわち、それらランダム行列の行列要素たちの、混合モーメントを具体的に記述することができた。

Jack 多項式を用いた円 アンサンブルのトレースのモーメント評価:

円 アンサンブルは、COE や CUE (ユニタリ群)の拡張として定義されるランダム行列モデルである。は正の実数  $\beta$

ラメータであり、 $\beta=1$  が COE、 $\beta=2$  が CUE に対応する。 $\beta=1,2$  の場合は、それらの行列モデルの研究は、表現論を用いると簡単に理解できることがある。ところが一般の  $\beta$  では対応する表現論が知られていない。本研究では Jack 対称多項式を用いることを出発点とし、円アンサンブルのトレースのモーメントについて、ある不等式評価を得ることができた。これは  $\beta=2$  の場合は Diaconis らによって得られていた「等式」に一致する。

その応用として、トレース・モーメントの族に対する中心極限定理を得ることができた。

実係数ガウス型べき級数の零点の相関関数におけるパフィアン表示:

ランダムべき級数を考える。ここで扱ったものは、係数が iid で実標準正規分布に従うものである。そのようなべき級数は収束半径 1 でほとんど確実に収束する。その零点の分布を調べたことが本研究成果である。主結果は、零点の分布がパフィアン点過程を定めることを示した。

その証明の過程で、べき級数の変数が実数の時、それらの符号の定める確率過程に関する不思議な性質を得た。すなわち、それらはフェルミオン・ガウス過程になることが示された。その本質的な理由を見つけることは今後の研究課題である。

ストリクトな分割の上の Plancherel 測度に関する多項式性:

ランダム分割に関する研究である。ランダム分割はランダム行列やランダム級数と似た性質が観測できることがよく知られている。本研究では、ストリクトな分割の上の Plancherel 測度について研究した。以前の研究で、対応するランダム分割の成分に対して、Tracy-Widom 分布が得られることを示した。本研究では、ヤング図形のコンテンツやフックに関する量の平均が、多項式になるということを示した。ストリクトでない通常の分割に対しては、2010 年頃に Stanley や Olshanski によって得られていた。

これらを、極限分布を理解するために応用している。その継続も今後の研究課題である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

- (1) S. Matsumoto: Polynomiality of Plancherel averages on strict partition. 数理解析研究所講究録, 印刷中. 査読無.
- (2) S. Matsumoto: Polynomiality of shifted Plancherel averages and content evaluations. Annales Mathematiques Blaise Pascal. 掲載受理. 査読有
- (3) J.-D. Urbina, J. Kuiper, Q. Hummel, S. Matsumoto, K. Richter: Multiparticle correlations in Mesoscopic Scattering: Boson Sampling, Birthday Paradox, and Hong-Ou-Mandel Profiles. Physical Review Letters 116 (2016) 100401, 17 pages. 査読有.
- (4) 松本詔: 円アンサンブルのトレースの中心極限定理. 数理解析研究所講究録 no.1952 (2015), 165-172. 査読無.
- (5) 松本詔: コンパクト対称空間に付随する行列空間上の多項式積分について. 数理解析研究所講究録 no.1945 (2015), 1-20. 査読無.
- (6) T. Jiang, S. Matsumoto: Moments of traces of circular beta-ensembles. Ann. Prob. 43 (2015), 3279-3336. 査読有.
- (7) S. Matsumoto: Zeros of a Gaussian power series and Pfaffian. 京都大学数理解析研究所講究録 no.1913 (2014), 93-105. 査読無.
- (8) S. Matsumoto, S. Moriyama: ABJ fractional brane from ABJM Wilson loop. J. High Energy Physics 03 (2014) 079, 24 pages. 査読有.
- (9) B. Collins, S. Matsumoto, N. Saad: Integration of invariant matrices and moments of inverses of Ginibre and Wishart matrices. J. Multivariate Analysis 126 (2014), 1-13. 査読有.
- (10) S. Matsumoto: Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces. Random Matrices: Theory Appl. 2 (2013), 1350001, 26 pages. 査読有.
- (11) S. Matsumoto, T. Shirai: Correlation functions for zeros of a Gaussian power series and Pfaffians. Electronic J. Prob. 18 (2013), 1-49. 査読有.

〔学会発表〕(計 16 件)

松本詔: Introduction to Weingarten calculus via orthogonal relations, ワークショップ「行列解析の展開」名古屋大学(愛知県名古屋市). 2017.3.31

S. Matsumoto: Plancherel measures on strict partitions: Polynomiality and limit shape problems. Workshop on Asymptotic Representation Theory, invited talk, パリ(フランス). 2017.2.20

松本詔: Polynomiality of Plancherel averages on strict partitions. RIMS 集会「リー型の組合せ論」京都大学数理解析研究所(京都府京都市). 2016.10.4

松本詔: Polynomiality of Plancherel averages on strict partitions. 研究集会「表現論がつなぐ数学 2016」沖縄県男女共同参画センター(沖縄県那覇市). 2016.9.10

松本詔: マップの数え上げによる Schwinger-Dyson 方程式の解の構成. 鹿児島解析・確率論セミナー, 鹿児島大学(鹿児島県鹿児島市). 2016.8.23-24

松本詔: ランダム行列とマップの数え上げ. 第1回「Free Monotone Transport」を読む会, 成田ビューホテル(千葉県成田市). 2016.3.6

松本詔: ランダム行列と順列の数え上げ. Kunitachi One-Day Symposium on the Recent Developments in the Mathematical Science, 一橋大学(東京都国立市). 2016.2.6

松本詔: ユニタリ群上の多項式の積分と置換の単調分解. CORE セミナー, 岡山大学(岡山県岡山市). 2015.10.14

松本詔:  $SU(n)$  の Weingarten calculus へ向けて. 研究集会「表現論がつなぐ数学 2015」JR 九州ホテル鹿児島(鹿児島県鹿児島市). 2015.9.17

松本詔: Weingarten calculus と対称群の調和解析. 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会 函数解析学分科会 特別講演, 京都産業大学(京都府京都市). 2015.9.14

松本詔: 円アンサンブルの中心極限定理と Jack 多項式. 第10回代数・幾何・解析セミナー, 鹿児島大学(鹿児島

県鹿児島市). 2015.2.19

松本詔: 円アンサンブルのトレースの中心極限定理. 確率論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市). 2014.12.19

松本詔: Central limit theorem for traces in circular beta-ensemble. 研究集会「Zeta Functions in OKINAWA 2014」沖縄コンベンションセンター(沖縄県宜野湾市). 2014.10.25.

松本詔: 例外型コンパクト Lie 群  $G_2$  上の Weingarten calculus. 研究集会「Zeta Functions in OKINAWA 2013」沖縄コンベンションセンター(沖縄県宜野湾市). 2013.10.20.

松本詔: コンパクト対称空間に付随する行列空間上の多項式積分について. RIMS 集会「組合せ論的表現論の展望」京都大学数理解析研究所(京都府京都市). 2013.10.8

松本詔: コンパクト対称空間上の Weingarten calculus. 研究集会「表現論がつなぐ数学」ひめぎんホール(愛媛県松山市). 2013.9.28

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)  
取得状況(計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ等:  
<http://www.sci.kagoshima-u.ac.jp/~shom/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松本詔 (MATSUMOTO, Sho)  
鹿児島大学 理工学域理学系・准教授  
研究者番号: 60547553

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者 なし