

平成 30 年 5 月 29 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2017

課題番号：25800063

研究課題名(和文) HNN拡大を通じた軌道同型の研究

研究課題名(英文) Research on orbit equivalence through HNN extensions

研究代表者

木田 良才(Kida, Yoshikata)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：90451517

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、可算群による標準確率空間への保測作用に付随した軌道同値関係を対象とし、その代数的な構造と作用する群との関連について成果を挙げた。中でも、バウムスラッグ・ソリター群をはじめとする、無限従順群とその有限指数部分群の間の同型に関するHNN拡大に対し、その作用に付随する軌道同値関係の安定性やモジュラー準同型の核がもつ積構造を明らかにした。それに加え、無限の中心をもつ安定群の特徴付けの研究、並びにトレリ群・ジョンソン核・曲面上の組み紐群による作用の剛性の研究を行った。

研究成果の概要(英文)：Our research interests lie in the orbit equivalence relation associated with a measure-preserving action of a countable group on a standard probability space, and we obtained results on its algebraic structure and relationship with the acting group. Among others, for the HNN extension of an infinite amenable group relative to an isomorphism between its finite index subgroups, including the Baumslag-Solitar groups, we showed stability of the orbit equivalence relation associated with its action and product structure of the kernel of the modular homomorphism. In addition, we studied characterization of stable groups with infinite center, and studied rigidity of actions of Torelli groups, Johnson kernels and surface braid groups.

研究分野：エルゴード群論

キーワード：離散群 軌道同型 測度付き亜群

1. 研究開始当初の背景

(1) 可算群による標準確率空間への自由保測作用やそれに付随する軌道同値関係は、フォンノイマン環の豊富な例を提供し、古くから作用素環論の研究者の興味を惹きつけてやまない題材である。一方、バウムスラッグ・ソリター群(BS群)は二つの非零整数 p, q をパラメータとする表示をもつ群であり、組み合わせ群論・幾何学的群論において関心を持たれてきた群である。過去の研究において、BS群の作用に対し、BS群のモジュラー準同型の像として得られるフローが軌道同値関係の不変量であることを示した。いくつかの場合では、このフローからパラメータ p, q を読み取ることができるが、一般の作用に対してはこれが可能かどうかは未解決である。この問題はBS群の測度同値による分類と直結するもので、その解決は測度同値の理論に新たな展開をもたらすものと期待される。

(2) 可算群による標準確率空間への自由保測作用が安定であるとは、その軌道同値関係が超有限 II₁ 型の同値関係を直積の下で吸収するときという。これと類似の性質はフォンノイマン環論において古くから研究されており、中心列による安定作用の特徴付けはよく知られている。一方で、安定作用をもつ群(安定群という)を特徴付けるという基本的な問題は、1987年に Jones-Schmidt によって提出されて以来、ほぼ進展が見られなかったが、近年の離散群論の発展は著しく、その知見が問題解決を促すことは十分に期待できる。

2. 研究の目的

(1) BS群の自由保測作用に対し、それに付随する軌道同値関係から、BS群を定義するパラメータ p, q が復元可能かどうかを探る。そして、もしそれが可能ならば、より一般に、無限従順群のHNN拡大に対しても同様に、HNN拡大を定義する準同型が引き起こす歪みが、軌道同値関係から復元可能かどうかを探る。この問題は、正規な部分同値関係と擬正規なものとの間にあるデリケートな違いが、同値関係の不変量となり得るかどうかを追求するものである。

(2) 安定群を特徴付ける性質を探る。関数解析的な群の性質がその特徴付けに現れることが予想される。群の関数解析的な性質と同値関係の代数的な性質を結びつける結果は、これまでもいくつか得られているが、その難型は、従順性と超有限性を結びつけた、Ornstein-Weiss と Connes-Feldman-Weiss による1980年頃の結果である。安定群の特徴付けはそれにつづくものと位置づけられ、その解決がもたらすインパクトは極めて大きい。

3. 研究の方法

(1) 過去の研究で得られた不変量であるフローは、モジュラー準同型の像にあたるものである。そこで示したことは、より正確には、モジュラー準同型そのものが不変量になるということであり、よって、その核に注目すれば、新たな不変量が見出されると期待される。その核はちょうど、BS群の交換子群であり、無限巡回群Zを無限個融合させた形をしている。その融合におけるデータが同値関係に反映されるかどうかは鍵となる。

(2) 群が安定であるためには、内部従順であることが必要である。群が内部従順であるとは、その群の上に、共役で漸近不変な確率測度の列が存在するときをいう。これは、その群に中心元であることに近い性質をもつ有限部分集合の列が存在することを意味する。無限の中心をもつ群が内部従順群の典型例である。本研究では、この典型例がいつ安定になるかを明らかにすることで、安定群の特徴付けに向けた足がかりとしたい。

4. 研究成果

(1) 非従順なBS群の交換子群が、無限巡回群Zと無限階数自由群の直積に測度同値になることを示した。この直積の群はBS群を定義するパラメータ p, q によらないので、すべての非従順なBS群の交換子群は同じ群と測度同値になってしまうことになる。これは、BS群の測度同値による分類問題がいかにデリケートであるかを指し示しており、問題の難しさや深さを浮き彫りにするものである。

交換子群からはパラメータ p, q を読み取ることができないので、次に第二導来群に着目した。BS群のツリーへの作用を見ると、BS群の第二導来群は自由群になることがわかる。BS群の元の共役による、第二導来群への作用を調べるのを目的に、第二導来群の自由生成系を書き下した。その方法は、BS群のある作用に付随する変換亜群を用いたものであり、自由群の部分群の生成元を求めるシュライアーの方法に基づいている。この方法が優れているのは、目的に合わせた自由生成系を得られるという点である。

過去に得られたフローに関する結果を拡張・整備することにより、一般化されたBS群(GBS群)に対して同様の不変量を構成し、それを計算した。GBS群は幾何学的群論の視点から自然なクラスであり、不変量はGBS群を定義する表示と作用のエルゴード性から計算可能である。例えば、あるGBS群の混合的作用からできるフローは自明になる。このようなフローは通常のBS群の作用では現れず、新たな例を提供するものである。

(2) 無限の中心をもつ群Gがいつ安定作用をもつかどうかを調べた。具体的には、次を

示した：

(I) C を G の中心的な部分群とし、組 (G , C) はカズダンの性質 (T) をもたないとする。このとき、 G は安定である。

(I I) C を G の中心的な部分群とし、組 (G , C) はカズダンの性質 (T) をもつとする。さらに、 G は安定とする。このとき、商 G / C も安定である。

これらの結果により、 G の安定性が中心群との組の性質 (T) に深く関わることが明らかになった。

また、(I) の応用として、 $G B S$ 群の安定作用を構成した。また、有階自由アーベル群とその有限指数部分群の間の同型に関する $H N N$ 拡大に対し、その安定作用を構成した。これらの群は、これまでによく知られていた内部従順群の例であり、そのような内部従順群に対し、安定作用の統一的な構成法を与えることができたのは意義深い。

(3) 無限の中心をもつ群で、研究成果 (2) (I) の仮定を満たすようなものを大量に構成した。具体的には、ツリーアブルな群から出発して、直積をとる操作と中心拡大をとる操作を有限回繰り返して得られる群に対し、それが無限の中心をもつならば (I) の仮定を満たすことを示した。実際にはより強く、そのような群が、ユニタリ表現に関してその重要性がよく知られている Haagerup の性質をもつことを示した。

(4) 無限の中心をもつ安定群の特徴付けに向け、次の結果を得た。群 G が中心的な部分群 C をもつとする。このとき、商 G / C が安定ならば、 G も安定である。これを示す上で、同値関係の中心拡大における、充足群の中心列の振る舞いについて考察した。

測度付き同値関係とその充足群の間には密接な関連がある。一般に充足群は中心の元で非自明なものはもたないが、中心的な振る舞いをする列は存在しうる。このような中心列の研究は同値関係を理解する上で重要な役割を果たし、ある中心列の存在が、同値関係の安定性を特徴付けることが知られている。本研究では、安定な同値関係の中心拡大がまた安定になるかどうかを調べ、同値関係が群作用の軌道同値関係であって、中心拡大がその群の中心拡大からくる場合に、肯定的な結論を得た。より正確には、安定同値関係 R の 2-コサイクルで可換群に値をもつものに対し、 R の適当な拡大をとることにより、その 2-コサイクルが自明なものに近づくことを示した。

この結果、最初に述べた、商 G / C が安定ならば、 G も安定である、という主張が従う。研究成果 (2) の結果 (I) (I I) と併せると、無限の中心をもつ安定群の特徴付けが得られる。他の応用として、群の安定性が実質的同型の下で保たれることが従う。

(5) 可算群による標準確率空間への自由保測作用が (軌道同型の意味で) 超剛であるとは、その軌道同値関係から作用に関する情報を全て復元できることをいう。可算群が超剛であるとは、そのすべての作用が超剛であるときをいう。過去の研究において、曲面の写像類群、ある特別な融合積が超剛であることを示した。本研究を始める前までは、超剛な群の例はその二つしかなく、その数は乏しいものであった。本研究では、共同研究により、トレリ群、ジョンソン核、曲面上の組み紐群など、写像類群の自然な部分群が同様の超剛性をもつことを示した。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文) (計 1 3 件)

Yoshikata Kida, The modular cocycle from commensuration and its Mackey range, preprint, to appear in the Proceedings of the 9th MSJ-SI conference in 2016. 査読有.

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kida/papers.html>

Yoshikata Kida, Stable actions and central extensions, Math. Ann. 369 (2017), 705-722. 査読有.

<https://doi.org/10.1007/s00208-017-1553-z>

Yoshikata Kida, Splitting in orbit equivalence, treeable groups, and the Haagerup property, In Hyperbolic geometry and geometric group theory, 167-214, Adv. Stud. Pure Math., 73, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017. 査読有. arXiv:1403.0688

Ionut Chifan, Yoshikata Kida, and Sujan Pant, Primeness results for von Neumann algebras associated with surface braid groups, Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. 16, 4807-4848. 査読有.

<https://doi.org/10.1093/imrn/rnv271>

Ionut Chifan and Yoshikata Kida, OE and W^* superrigidity results for actions by surface braid groups, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 111 (2015), 1431-1470. 査読有.

<https://doi.org/10.1112/plms/pdv058>

Yoshikata Kida, Stable actions of central extensions and relative property (T), Israel J. Math. 207 (2015), 925-959. 査読有.

<https://doi.org/10.1007/s11856-015-1167-7>

Ionut Chifan, Yoshikata Kida, and Adrian Ioana, W^* -superrigidity for arbitrary actions of central quotients

of braid groups, Math. Ann. 361 (2015), 563-582. 査読有.

<https://doi.org/10.1007/s00208-014-1077-8>

Yoshikata Kida, Stability in orbit equivalence for Baumslag-Solitar groups and Vaes groups, Groups Geom. Dyn. 9 (2015), 203-235. 査読有.

doi: 10.4171/GGD/311

Yoshikata Kida, Inner amenable groups having no stable action, Geom. Dedicata, 173 (2014), 185-192. 査読有.

<https://doi.org/10.1007/s10711-013-9936-0>

Yoshikata Kida, Invariants of orbit equivalence relations and Baumslag-Solitar groups, Tohoku Math. J. (2) 66 (2014), 205-258. 査読有.

doi:10.2748/tmj/1404911861

Yoshikata Kida and Saeko Yamagata, Automorphisms of the Torelli complex for the one-holed genus two surface, Tokyo J. Math. 37 (2014), 335-372. 査読有.

doi:10.3836/tjm/1422452797

Yoshikata Kida and Saeko Yamagata, The co-Hopfian property of the surface braid groups, J. Knot Theory Rmifications, 22 (2013), 1350055, 46 pp. 査読有.

<https://doi.org/10.1142/S0218216513500557>

Yoshikata Kida, The co-Hopfian property of the Johnson kernel and the Torelli group, Osaka J. Math., 50 (2013), 309-337. 査読有.

<https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1371833487>

[学会発表](計18件)

木田良才, 離散群のエルゴード理論の諸相, 日本数学会年会, 日本数学会賞春季賞受賞総合講演, 東京大学, 2018年.

Yoshikata Kida, On a treeing arising from the Baumslag-Solitar group, Advances in non commutative geometry, Kyoto University, 2017年.

Yoshikata Kida, Inner amenable groups, stable actions, and central extensions, The second Australia-Japan Geometry, Analysis and their Applications, Kyoto University, 2017年.

木田良才, Questions around stable equivalence relations, 作用素環・作用素環論研究集会, 前橋工科大学, 2016年.

木田良才, 安定作用と群の中心拡大, 日

本数学会秋季総合分科会, 函数解析分科会一般講演, 関西大学, 2016年.

Yoshikata Kida, Stable actions and central extensions, The 9th MSJ-SI, Operator Algebras and Mathematical Physics, Tohoku University, 2016年.

Yoshikata Kida, Inner amenable groups, stable actions, and central extensions, Nagoya University, Rigidity School, 2016年.

Yoshikata Kida, Stable actions and central extensions, Von Neumann Algebras, Hausdorff Research Institute for Mathematics, 2015年.

Yoshikata Kida, Stable actions and central extensions, Geometric Analysis on Discrete Groups, RIMS, Kyoto University, 2016年.

Yoshikata Kida, On treeings arising from Baumslag-Solitar groups, International Conference on Non-commutative Geometry and K-Theory, Chongqing University, 2015年.

Yoshikata Kida, Mostow-type rigidity of the mapping class group and its generalization, IGA/AMSI Workshop: Australia-Japan Geometry, Analysis and their Applications, the University of Adelaide, 2015年.

Yoshikata Kida, Structure of some inner amenable groups and its application (after Tucker-Drob), 作用素環論の最近の進展, 京都大学数理解析研究所, 2015年.

Yoshikata Kida, Inner amenable groups and stable orbit equivalence relations, Mathematical Symposium ENS Lyon-Todai, ENS Lyon, 2015年.

Yoshikata Kida, Stable orbit equivalence relations and relative property (T), Von Neumann algebras and ergodic theory, UCLA, 2014年.

Yoshikata Kida, Stable orbit equivalence relations, The 7th MSJ-SI, Hyperbolic Geometry and Geometric Group Theory, University of Tokyo, 2014年.

木田良才, Stability in orbit equivalence, central extensions of groups and relative property (T) I, II, 作用素環とその周辺分野の発展, 京都大学数理解析研究所, 2014年.

Yoshikata Kida, Stability in orbit equivalence, central extensions of groups, and relative property (T), Metric geometry and analysis,

Department of Mathematics, Kyoto University, 2013 年.

Yoshikata Kida, Inner amenable groups having no stable action, China-Japan Conference on Noncommutative Geometry and K-theory, Jilin University, 2013 年.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kida>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

木田 良才 (KIDA, Yoshikata)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：9 0 4 5 1 5 1 7