

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 9 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800069

研究課題名(和文)非線形偏微分方程式に対する適切性・非適切性の研究

研究課題名(英文)Well-posedness and ill-posedness for the nonlinear partial differential equations

研究代表者

岩渕 司 (IWABUCHI, Tsukasa)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：40634697

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：流体の運動を記述する非線形偏微分方程式や非線形シュレディンガー方程式などの偏微分方程式に対して、解が安定的に存在するための初期条件をどこまで一般化できるかを考察した。ナビエ-ストークス方程式に対しては平均振動が有界であるデータに対して時間大域解を得ることができ、コリオリ力を考慮した場合は時間大域解を得るための初期条件を明らかにした。シュレディンガー方程式に対しては2次の非線形項の場合に初期値連続依存性の破綻を証明した。また、解の挙動についても考察し、分数冪ラプラシアンを有するパーカース方程式に対して解が基本解であるポアソン核に漸近することがわかった。

研究成果の概要(英文)：This work is concerned with revealing and understanding the optimal initial condition for some nonlinear partial differential equations such as Navier-Stokes equations and Schrodinger equations. We studied the Navier-Stokes equations in the spaces of functions which have the bounded mean oscillation property, and also gave some initial condition for the equations with the Coriolis force. As to Schrodinger equations, we proved ill-posedness with quadratic non-linearity. It is also proved for the Burgers equation with the critical dissipation that small global solution tends to the Poisson kernel.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：偏微分方程式 初期値問題 適切性および非適切性 ベゾフ空間

1. 研究開始当初の背景

流体の運動を記述するナビエ-ストークス方程式や非線形光学のモデルであるシュレディンガー方程式などの非線形偏微分方程式の初期値問題に対して、解が安定的に得られるような初期条件を研究する。初期データを表す関数の正則性や可積分性に着目し、解が安定的に得られる様な最も広い関数空間を明らかにすることが目標である。そのために、初期時刻における関数の正則性が悪い場合には解が初期データの変動に対して連続的には依存しないことも考察する。解が安定的に得られる性質のことは適切性と呼ばれており、適切性が成り立たない性質のことは非適切性と呼ばれている。

2. 研究の目的

非線形シュレディンガー方程式について、冪上型の非線形項を有する場合には、Bourgain によって提唱されたフーリエ制限ノルム法によって正則性の低い初期値に対して適切性の研究がなされていたが、非適切性という観点からも解析を行い適切性が得られる臨界空間を明らかにする。想定している非線形項は2次あるいは3次のものである。

ナビエ-ストークス方程式に対しては平均振動が有界である関数空間での適切性の結果(Koch-Tataru(2001))が知られているが別証明を与える。またコリオリ力を考慮した場合の適切性の考察を行い、時間大域解が得られるための初期条件を明らかにする。関連する話題として、Navier-Stokes 方程式の時間大域的挙動や移流拡散方程式の適切性についても考察し適切性の理解に繋がられる様に研究を推進する。

様々な領域においてベゾフ空間と呼ばれる関数空間を使って偏微分方程式を解析するための理論を整備する。ユークリッド空間の場合、ベゾフ空間論は十分に整備されているが一般領域上の場合には部分的な結果しか知られていない。偏微分方程式への応用の観点から領域上のベゾフ空間の様々な性質を明らかにして、最適な解析を行うことを目指して研究する。

3. 研究の方法

学会、研究集会、セミナー等で成果発表を行い、国内外の研究者からの批判をうけ研究交流を行いながら研究を推進する。また様々な知識をより広く理解するため、様々な分野の研究集会に参加して偏微分方程式の研究に対する研究動向について情報収集しながら研究を行う。

4. 研究成果

非線形シュレディンガー方程式に関しては、単独の方程式から始め2次の非線形項に対して結果を得ることができた。空間次元が1次元と2次元の場合に適切性が知られていたが、非適切性を証明することで既存の結果

で知られていた適切性が得られる関数空間は最適であることがわかった。また、システムのシュレディンガー方程式に関しても取り扱い、質量比の違いに応じて適切性と非適切性の境目の関数空間が本質的に異なることがわかった。

ナビエ-ストークス方程式に対しては、平均振動が有界である関数の空間において適切性を示すことができた。ベゾフ空間と類似のトリーベル-リゾルキン空間と呼ばれる関数空間での評価式を用いて、小さい初期値に対する時間大域解の存在を示すことができた。コリオリ力を考慮した場合には、回転速度が大きければ大きいほど解が安定的に存在することが期待される。時間大域解が存在するための十分条件を回転速度と初期値データによって定量的に特徴付けられることがわかった。また回転成層流体に対しても時間大域解の結果を得ることができた。

分数冪ラプラシアンを有する臨界型のパーガーズ方程式の時間大域的な存在と漸近挙動について結果を得た。ここでいう臨界型とは、消散に関するオーダーが非線形項と釣り合う場合であり、時間大域的な正則性が得られるか否かの境目の場合である。時間大域的挙動は知られていなかったが、初期値が小さいならば時間大域解が存在して解は時刻無限大でポアソン核に漸近することがわかった。ハミルトン-ヤコビ方程式に対しても類似の考察をし、小さい初期値に対して時間大域解が存在し、解は時刻無限大においてポアソン核に近づくことがわかった。

領域上のベゾフ空間論の整備については、準備として開集合上のスペクトル掛け算作用素に対する有界性の定理について研究した。具体的には、開集合上でディリクレラプラシアンを考える。スペクトル分解定理によりディリクレラプラシアンの関数を考えることができ、その有界性を考察した。2乗可積分空間の場合にはスペクトル分解定理から直ちに結果が得られるが一般の p 乗可積分空間(p は1以上の実数)でも成り立つことがわかった。

5. 主な発表論文等 (研究代表者は下線)

[雑誌論文](計 14 件)

[1] T. Iwabuchi, T. Matsuyama, K. Taniguchi, "Boundedness of spectral multipliers for Schrödinger operators on open sets", to appear in Rev. Mat. Iberoam. (査読有り)

[2] T. Iwabuchi, A. Mahalov, R. Takada, "Global solutions for the incompressible rotating stably stratified fluids", to appear in Math. Nachr. (査読有り)

[3] T. Iwabuchi, T. Kawakami, "Existence of mild solutions for the Hamilton-Jacobi equation with critical fractional viscosity in the Besov spaces", J. Math. Pures Appl.(9) **107** (2017),no.4, 464--489. (査読有り)

[4] T. Iwabuchi, M. Nakamura, "On the existence time of local solutions for critical semilinear Schrödinger equations in Sobolev spaces", Nonlinear Anal. Real World Appl. **33** (2017), 168--180. (査読有り)

[5] T. Iwabuchi, T. Ogawa, "Ill-posedness for the drift diffusion system in the homogeneous Besov spaces", Osaka J. Math. **53** (2016), no. 4, 919--939. (査読有り)

[6] T. Iwabuchi, T. Ogawa, K. Uriya, "Ill-posedness for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations in two dimensions", J. Funct. Anal. **271** (2016), no. 1, 136--163. (査読有り)

[7] T. Iwabuchi, R. Takada, "Dispersive effect of the Coriolis force and the local well-posedness for the Navier-Stokes equations in the rotational framework", Funkcial. Ekvac. **58** (2015), no. 3, 365--385. (査読有り)

[8] T. Iwabuchi, K. Uriya, "Ill-posedness for the quadratic nonlinear Schrödinger equation with nonlinearity $|u|^2$ ", Commun. Pure Appl. Anal. **14** (2015), no. 4, 1395--1405. (査読有り)

[9] T. Iwabuchi, "Global solutions for the critical Burgers equation in the Besov spaces and the large time behavior", Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **32** (2015), no. 3, 687--713. (査読有り)

[10] T. Iwabuchi, T. Ogawa, "Ill-posedness for nonlinear Schrödinger equations with quadratic non-linearity in low space dimensions", Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 4, 2613--2630. (査読有り)

[11] T. Iwabuchi, R. Takada, "Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in the function spaces of Besov type", J. Funct. Anal. **267** (2014), no. 5, 1321--1337. (査読有り)

[12] T. Iwabuchi, "Local solvability of

the Keller-Segel system with Cauchy data in the Besov spaces", Math. Methods Appl. Sci., **37**, (2014), 1273--1277. (査読有り)

[13] T. Iwabuchi, M. Nakamura, "Small solutions for nonlinear heat equations, the Navier-Stokes equation and the Keller-Segel system in Besov and Triebel-Lizorkin spaces", Adv. Differential Equations **18** (2013), no. 7-8, 687--736. (査読有り)

[14] T. Iwabuchi, R. Takada, "Global solutions for the Navier-Stokes equations in the rotational framework", Math. Ann. **357** (2013), no. 2, 727--741. (査読有り)

〔学会発表〕(計 39 件)

1. T. Iwabuchi, "On the ill-posedness for some parabolic equations in the Besov spaces", The 18th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis, 2017年2月20日--21日, 東北大学.

2. T. Iwabuchi, "Large time behavior of solutions for the Burgers equation with critical dissipation", International Research Training Group 1529 seminar, 2017年2月9日, Technische Universität Darmstadt, ドイツ.

3. T. Iwabuchi, "\$L^1\$ boundedness of spectral multipliers for the Dirichlet Laplacian on open sets", International Research Training Group 1529 seminar, 2016年12月7日, Technische Universität Darmstadt, ドイツ.

4. T. Iwabuchi, "Besov spaces generated by the Dirichlet Laplacian", The 13th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2016年11月30日--12月2日, Technische Universität Darmstadt, ドイツ.

5. T. Iwabuchi, "Besov spaces defined via the spectral theorem for the Dirichlet Laplacian", The 14th Linear and Nonlinear Waves, 2016年11月2日--4日, 滋賀県立県民交流センター.

6. T. Iwabuchi, "Besov spaces generated by the Dirichlet Laplacian", Recent Topics on Dispersive Equations, 2016年8月30日--31日, 中央大学.

7. T. Iwabuchi, "Besov spaces defined via

the spectral theorem for the Dirichlet Laplacian'', Ito Workshop on PDE, 2016年8月22日, 九州大学.

8. T. Iwabuchi, ``開集合上の超関数と Besov 空間論'', 大阪市立大学数学研究所 談話会, 2016年7月20日, 大阪市立大学.

9. T. Iwabuchi, ``Besov spaces defined via the spectral theorem for the Dirichlet Laplacian'', The 7th Pacific RIM Conference on Mathematics 2016, 2016年6月27日--7月1日, 韓国.

10. T. Iwabuchi, ``Besov spaces defined via the spectral theorem for the Dirichlet Laplacian'', The 8th Nagoya Workshop on Differential Equations, 2016年2月23日--24日, 名古屋大学.

11. T. Iwabuchi, ``ポテンシャルで摂動された Besov 空間について'', 調和解析セミナー, 2015年12月25日--27日, 首都大学東京.

12. T. Iwabuchi, ``シュレディンガー作用素の関数に対する L^p -有界性とその応用'', 第9回実解析と函数解析による偏微分方程式論 研究集会, 2015年12月23日--25日, ヒルズサンピア山形.

13. T. Iwabuchi, ``On the large time behavior of small solutions for the critical Burgers equation'', 3rd Chile-Japan Workshop on Nonlinear PDEs, 2015年12月7日--12日, 大阪大学.

14. T. Iwabuchi, ``On the large time behavior of solutions for the critical Burgers equations'', Critical Problems in Nonlinear Evolution Equations, 2015年11月7日, 東京理科大学.

15. K. Taniguchi, T. Iwabuchi, T. Matsuyama, ``Schrödinger 作用素の関数の L^p -有界性について'', 日本数学会, 2015年9月13日--16日, 京都産業大学.

16. K. Uriya, T. Ogawa, T. Iwabuchi, ``2次の非線形 Schrödinger 方程式系に対する非適切性について'', 日本数学会, 2015年9月13日--16日, 京都産業大学.

17. T. Iwabuchi, ``臨界型 Burgers 方程式の時間大域解に対する漸近挙動'', OCU Monday Seminar, 2015年7月13日, 大阪市立大学.

18. T. Iwabuchi, ``臨界型 Burgers 方程式の時間大域解に対する漸近挙動について'',

大阪大学微分方程式セミナー, 2015年5月15日, 大阪大学.

19. T. Iwabuchi, ``臨界型 Burgers 方程式の時間大域解に対する漸近挙動'', 京都大学 NLPDE セミナー, 2015年5月1日, 京都大学.

20. T. Iwabuchi, ``臨界型 Burgers 方程式の時間大域解と漸近挙動について'', 大阪市大・大阪府大合同「南大阪応用数学セミナー」, 2015年4月25日, 大阪府立大学.

21. T. Iwabuchi, ``臨界型 Burgers 方程式の時間大域解と漸近挙動'', 大阪市立大学数学研究所談話会, 2015年4月15日, 大阪市立大学.

22. T. Iwabuchi, ``On the large time behavior of solutions for the critical Burgers equations in the Besov spaces'', The 7th OCAMI-TIMS-Kobe-Waseda Joint International Workshop on Differential Geometry, Geometric Analysis and Mathematical Physics, 2015年3月14日--17日, 大阪市立大学.

23. T. Iwabuchi, ``一般領域における Besov 空間とその性質'', 三大学偏微分方程式セミナー, 2015年2月25日, 中央大学.

24. T. Iwabuchi, ``On the ill-posedness for the nonlinear Schrödinger equations in low space dimensions'', Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations, 2014年9月9日--12日, 大阪大学.

25. T. Iwabuchi, ``On the ill-posedness for the drift-diffusion system in the homogeneous Besov spaces'', Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, 2014年6月30日--7月2日, 京都大学.

26. T. Iwabuchi, ``臨界型 Burgers 方程式の時間大域解と漸近挙動について'', 第125回神楽坂解析セミナー, 2014年6月28日, 東京理科大学.

27. T. Iwabuchi, ``臨界型 Burgers 方程式の時間大域解と漸近挙動について'', 信州大学偏微分方程式研究集会, 2014年6月13日--14日, 信州大学.

28. T. Iwabuchi, ``On the global solutions and the large time behavior for the critical Burgers equation in the Besov spaces'', Conference on Partial Differential Equations 2014, 2014年5月

28日--6月1日, Monastery of Novacella, イタリア.

29. T. Iwabuchi, ``On the large time behavior of solutions for the critical Burgers equation'', Seminar on Nonlinear Analysis at Okayama, 2014年5月12日, 東京工業大学.

30. T. Iwabuchi, ``臨界型 Burgers 方程式の時間大域解と漸近挙動について'', 九州関数方程式セミナー, 2014年5月9日, 九州大学.

31. T. Iwabuchi, ``Global solutions for the Burgers equation in the Besov spaces and the large time behavior'', 日本数学会, 2014年3月15日--18日, 学習院大学.

32. T. Iwabuchi, ``III-posedness for the nonlinear Schrödinger equations in low space dimensions'', Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation, 2014年2月20日--21日, 東京理科大学.

33. T. Iwabuchi, ``III-posedness for the drift diffusion system in the homogeneous Besov spaces'', Nonlinear Dispersive Equations and Harmonic Analysis, 2014年1月14日, 京都大学.

34. T. Iwabuchi, ``III-posedness for the nonlinear Schrödinger equations in low space dimensions'', Linear and Nonlinear Waves No.11, 2013年10月30日-11月1日, ピアザ淡海 滋賀県立県民交流センター.

35. T. Iwabuchi, ``移流拡散方程式の初期値問題に対する非適切性について'', 日本数学会, 2013年9月24日--27日, 愛媛大学.

36. T. Iwabuchi, ``III-posedness for the Schrödinger equations in one and two space dimensions'', 9th International ISAAC Congress, 2013年8月5日--9日, Krakow, ポーランド.

37. T. Iwabuchi, ``Global solutions for the Navier-Stokes equations in the rotational framework'', The 8th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2013年6月17日--20日, 早稲田大学.

38. T. Iwabuchi, ``低次元における非線形シュレディンガー方程式の非適切性について'', 早稲田大学非線形解析勉強会, 2013年6月29日, 早稲田大学.

39. T. Iwabuchi, ``Global solutions for

the Navier-Stokes equations in the rotational framework'', Harmonic Analysis and PDEs on Manifolds, 2013年4月19日--20日, 中央大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩淵 司 (IWABUCHI Tsukasa)

東北大学大学院 理学研究科 准教授

研究者番号: 40634697