

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 5 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800072

研究課題名(和文)幾何学的保存則が紡ぐ発展方程式と変分問題の新展開

研究課題名(英文)New developments on evolution equations and variational problems by geometric conservation laws

研究代表者

小野寺 有紹(Onodera, Michiaki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・助教

研究者番号：70614999

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：層ポテンシャルの再構成問題は変分構造を有し、与えられたポテンシャルを生成する層(閉曲面)の存在が知られている。一方、逆問題の基本的問いである一意性、すなわち、前述の性質をもつ層が一意に定まるかという問題に対しては、変分構造を定める汎函数が一般に凸であるとは限らず複雑であり非自明であった。本研究では、仮想的にパラメータをつけた問題の族の考察し、対応する層の族がなす曲面の動きを発展方程式として導き、その力学系的性質を明らかにすることで、元の問題に対しての層の一意性およびその形状の定量的評価を得ることに成功した。

研究成果の概要(英文)：An inverse problem in potential theory asks if, for a given potential, there is a unique surface which exactly induces the same gravitational potential as the given one. Although the problem has a variational structure from which the existence of a desired surface follows, the uniqueness question had not been clarified for decades because of the lack of information on the shape of the functional corresponding to the variational structure.

My research shows that the corresponding surface is actually unique if the given potential is close to a radially symmetric one. This is the first result asserting the uniqueness for asymmetric situation, to the best of my knowledge. The proof is based on the consideration of a parametrized auxiliary problem which produces a family of surfaces satisfying an evolution equation. I clarified the dynamical structure of the evolution equation and derived the uniqueness conclusion together with a quantitative estimate for the shape of the surface.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：ポテンシャル論 発展方程式 変分問題 過剰決定問題

1. 研究開始当初の背景

(1) 逆問題として現れる曲面再構成に関するポテンシャル論の問題は、その解の存在は保証されているもののそれが唯一に限るかという一意性に関しては特別な場合を除き未解決の問題であった。実際、異なる位置にある二つの質点が生成する重力場と同じ重力場を生成する曲面が二つあることが知られており、それはこの問題の解構造が複雑であることを示唆していた。

(2) 一方、その類似の問題である領域再構成の問題に対しては、その変分構造から一意性がしたがうことが知られており、またこの静的な問題は流体力学に現れる Hele-Shaw 流を記述する動的な自由境界問題と“共役”な関係を有することが 1972 年の Richardson による Hele-Shaw 流に対するモーメントの保存則の発見によって明らかにされていた。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、幾何学的保存則をキーワードに静的な変分問題と動的な幾何学的発展方程式の“共役性”に焦点を当て、それぞれ独立の解析では得られなかった結果を両者の密接な関連性を用いて求めることを目的とする。特に、曲面再構成問題に対応する動的な幾何学的発展方程式を導出し、その解析によって一意性の問題の解決を目標とする。

(2) また、これら“共役”な問題を繋ぐ幾何学的保存則という大域的な数学的構造自体に着目し、動的な問題の解の漸近的な振る舞いを階層的に分類し、その力学系的構造を明らかにすることが目的である。動的な問題の解構造の解明は静的な問題の解構造に対しても有益な情報をもたらすことが期待される。

3. 研究の方法

(1) 曲面再構成の静的問題のパラメータに関する解の連続性を考察するため、仮にそのような連続的な解があったとしてそれが見たような動的な幾何学的発展方程式を導出する。また、逆にそのような動的な方程式の解が存在すれば連続的に変化する静的問題の解の族が得られることを示す。

(2) 導出される動く曲面を記述する動的問題を発展方程式として表現し、それを関数解析、微分方程式論を用いて解析し、その可解性を証明する。

(3) また、発展方程式を無限次元力学系として考察し、それらが有する幾何学的保存則を用いて解の大域挙動の分類を行う。

4. 研究成果

(1) 幾何学的発展方程式による曲面族の特徴づけ：曲面再構成の静的問題に対し仮想的なパラメータを導入し、それが変化するときの対応する解、すなわち曲面の族が幾何学的発展方程式により記述されることを証明した。これは、領域再構成の静的問題の解の族が Hele-Shaw 流によって記述されることに対応するものである。この証明された事実によって、曲面再構成問題の連続変化する解が幾何学的発展方程式の可解性から導かれることになる。また、証明では楕円型方程式の正則性理論を用いた背理法による議論を用いたが、これは先行研究で用いられていた手法に比べ関数解析的に明解な形で述べており、他の問題への適用を考える上でも有益であると考えている。

(2) 幾何学的発展方程式の可解性：上で述べた静的問題の解の族の発展方程式による特徴付けにより、静的問題の解の振る舞いは発展方程式の可解性およびその解の振る舞いを考察することに帰着される。実際、本研究の成果として、この発展方程式がヘルダー空間とよばれる正則な解空間において一意に解をもつことを示すことができた。その証明の鍵となるのは線形化作用素の解析的半群の生成性であり、これを示すために、楕円型正則性評価による交換子評価を用いて領域が半平面の場合に帰着し、それをフーリエ積分作用素として表現し調和解の結果を援用した。なお、本研究に現れる線形化作用素は微分作用素ではなく非局所型であるため、Hele-Shaw 流の古典解の存在を示した Escher と Simonett の調和解の議論を参考にしたが、Hele-Shaw 流に対応する作用素が良く知られた Dirichlet-to-Neumann 写像なのに比べ本研究で現れる非局所型作用素の主要部はいわば Robin-to-Dirichlet 写像と新しい型のものであり、その表象の代数的解析や交換子評価を行う必要があった。

(3) 曲面の分岐条件の導出：発展方程式の線形化作用素の解析により、曲面再構成問題の解の分岐に対する必要条件が得られた。すなわち、曲面の一意性が破綻する瞬間の曲面はその平均曲率が負となる部分を必ずもつ。この事実は 1 (1) で述べた一意性の反例に対しても観測されるものであり、曲面の形状という幾何学的条件と一意性という解析的性質を結びつけた点でおもしろい。

(4) 過剰決定問題の領域の対称性：線形化作用素の解析によって導かれた曲面の分岐現象の必要条件は、言い換えれば平均曲率が (真に) 正の曲面は局所的に一意である (すなわち、その近傍には解となる曲面が存在しない) ことを示している。しかし、このこと

は大域的な一意性については何も言及していない。その一方で、回転対称な重力場を生成する曲面はまた回転対称、したがって球面となることが知られている。これは曲面再構成問題が本質的に過剰決定問題、すなわち楕円型方程式に Dirichlet および Neumann 境界条件を課した問題が可解となる領域（の境界）を求める問題が等価であることに注意すると、Serrin による移動平面法を用いた対称性の議論によって導かれる。本研究ではこのような対称性によらない新しい証明方法として、仮想パラメータを導入した過剰決定問題の解を構成することで一意性を導くという新しい方法を提案し、移動平面法から導かれる結果を含むより一般の状況で領域の回転対称性を得ることに成功した。これは次に述べるように、曲面再構成問題の大域的一意性を示す上での布石となる。

(5) 曲面の大域的一意性：(4) で述べた手法を一般化し、曲面再構成問題の一意性を単調にその内部が拡大するようなパラメータ付き問題に対応する閉曲面族の構成に帰着することができる。これは動的な幾何学的発展方程式の時間大域的可解性に対応する。この大域的可解性は通常、線形化作用素の解析などの局所的情報だけでは導くことが難しいが、ある条件下において、その詳細なスペクトル解析とともに発展方程式の幾何学的保存量を用いて発展方程式の大域的可解性を得ることができた。このことの帰結として、与えられる重力場が一点の質点から生成されるものに十分近い場合には曲面再構成問題の解が唯一つ存在することを示すことに成功した。また、その解、すなわち曲面の形状の定量的な評価についても得ることができた。これは非対称性の場合も含んでおり、非対称な過剰決定問題の可解領域の一意性を示す点でも新しい結果および手法を提供するものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

(1) 小野寺有紹, Dynamical approach to an overdetermined problem in potential theory, *J. Math. Pures Appl.*, 査読有, doi:10.1016/j.matpur.2016.03.011

(2) 小野寺有紹, On the symmetry in a heterogeneous overdetermined problem, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 査読有, Vol. 47, No. 1, 2015, pp. 95-100, doi: 10.1112/blms/bdu098

(3) 小野寺有紹, Geometric flows for quadrature identities, *Math. Ann.*, 査読有, Vol. 361, No. 1-2, 2015, pp. 77-106,

doi: 10.1007/s00208-014-1062-2

(4) Bartolucci, D.; Lee, Y.; Lin, C.-S.; 小野寺有紹, Asymptotic analysis of solutions to a gauged O(3) sigma model, *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire*, 査読有, Vol. 32, No. 3, 2015, pp. 651-685, doi:10.1016/j.anihpc.2014.03.001

(5) 小野寺有紹, Evolution equations for quadrature identities, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1889, 2014, pp. 13-20.

(6) 小野寺有紹, A geometric flow for quadrature surfaces, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1850, 2013, 1-22.

[学会発表](計24件)

(1) 小野寺有紹, 仙臺応用数学研究集会, 東北大学(宮城), 2016年3月9日, "Dynamical approach to an overdetermined problem in potential theory".

(2) 小野寺有紹, Workshop on "Geometric flows and related problems", 東京工業大学(東京), 2016年3月3日, "Dynamical approach to an elliptic overdetermined problem".

(3) 小野寺有紹, The 33rd Kyushu Symposium on Partial Differential Equations, 西新プラザ(福岡), 2016年1月28日, "Dynamical approach to an overdetermined problem".

(4) 小野寺有紹, 第13回浜松偏微分方程式研究集会 静岡大学浜松キャンパス(静岡), 2015年12月22日, "Dynamical approach to an overdetermined problem".

(5) 小野寺有紹, Korea-Japan Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, Ulsan(韓国), 2015年12月1日, "Dynamical approach to an elliptic overdetermined problem".

(6) 小野寺有紹, 第11回非線型の諸問題, メートプラザ佐賀(佐賀), 2015年9月30日, "Dynamical approach to an elliptic overdetermined problem".

(7) 小野寺有紹, 4th Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Palinuro(イタリア), 2015年5月25日, "Dynamical approach to overdetermined problems in potential theory".

(8) 小野寺有紹, ACCA-JP/UK Joint

Workshop, London (イギリス), 2015年3月13日, "Dynamical equations for quadrature domains".

(9) RIMS Conference on "パターン形成と界面ダイナミクスの数理", 京都大学数理解析研究所(京都), 2015年1月7日, "On a dynamical approach to an inverse problem in potential theory".

(10) 小野寺有紹, 第4回弘前非線型方程式研究会, 弘前大学(青森), 2014年12月6日, "Uniqueness of an admissible domain for a generalized mean value formula for harmonic functions".

(11) 小野寺有紹, Mini-symposium on PDE at Okayama University, 岡山大学(岡山), 2014年12月1日, "A flow approach to an overdetermined problem in potential theory".

(12) 小野寺有紹, International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory, 東京工業大学(東京), 2014年11月22日, "On a deformation flow for an inverse problem in potential theory".

(13) 小野寺有紹, Seminar, Analysis and Applications, Stockholm (スウェーデン), 2014年9月22日, "A flow approach to an overdetermined problem in potential theory".

(14) 小野寺有紹, 2nd Slovak-Japan Conference on Applied Mathematics, Radzovce – Obrucna (スロバキア), 2014年9月15日, "On the uniqueness in a free boundary problem in potential theory".

(15) 小野寺有紹, 6th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 東京工業大学(東京), 2014年9月1日, "A flow approach to an inverse problem in potential theory".

(16) 小野寺有紹, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid (スペイン), 2014年7月9日, "On the uniqueness of quadrature surfaces".

(17) 小野寺有紹, International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 釜山(韓国), 2014年3月27日, "On the uniqueness of quadrature surfaces".

(18) 小野寺有紹, Seminaire d'Equations aux Derivees Partielles et Applications, Nancy(フランス), 2014年2月4日, "On the

uniqueness of quadrature surfaces".

(19) 小野寺有紹, 12th Annual Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, Daejeon (韓国), 2014年1月23日, "Geometric flows for quadrature surfaces".

(20) 小野寺有紹, Kyushu-Euskadi Workshop on Applied Mathematics, 福岡大学セミナーハウス(福岡), 2013年11月12日, "Geometric evolution equations for quadrature identities".

(21) 小野寺有紹, Workshop on Free Boundaries in Laplacian Growth Phenomena and Related Topics, 東北大学(宮城), 2013年10月15日, "On the uniqueness of quadrature surfaces".

(22) 小野寺有紹, KIAS Nonlinear PDE Seminar, ソウル(韓国), 2013年10月4日, "On the uniqueness of quadrature surfaces".

(23) 小野寺有紹, 3rd Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, 東京工業大学(東京), 2013年9月2日, "On the uniqueness of quadrature surfaces".

(24) 小野寺有紹, RIMS Conference on "Designs, Codes, Graphs and Related Areas", 京都大学数理解析研究所(京都), 2013年7月1日, "Evolution equations for quadrature identities".

6. 研究組織

研究代表者

小野寺有紹 (ONODERA, Michiaki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・助教

研究者番号: 70614999