様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 １１ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８０００７３

研究課題名（和文）幾何学的対象の上でのスペクトル・散乱理論

研究課題名（英文）Spectral and scattering theory on geometric objects

研究代表者
伊藤　健一（Ito, Kenichi）

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：９０５１２５０９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：漸近的Euclid型エンドや漸近的ファネル双曲型エンドを持つ多様体の上で，Schroedinger作用素に対する定常的散乱理論の新たな一般的な枠組みを構成した．また離散直線および離散半直線の上で，離散Schroedinger作用素に対する閾値共鳴状態を自然な形で定式化することに成功した．さらに正方格子上の離散Laplace作用素のレゾルベントに対し，各閾値周りの分枝部分の具体的表示を得た．

研究成果の概要（英文）：I constructed a new general framework for the stationary scattering theory for the Schroedinger operator on a manifold with asymptotically Euclidean and/or hyperbolic funnel ends. I also succeeded in formulating the threshold resonances in a natural manner for the discrete Schroedinger operators on the discrete line and discrete half-line. Moreover, I obtained explicit expressions for the branching parts around thresholds for the resolvent of the discrete Laplacian on the square lattice.

研究分野：数物系科学

キーワード：関数方程式　多様体上での解析

１．研究開始当初の背景

Euclid空間上の線形Schrödinger作用素に対するスペクトル・散乱理論は 1970 年代から 1980 年代にかけて大きく発展し，典型的な場合については，すなわち摂動項が短距離型，長距離型，周期的あるいはN体型などの場合については, 1990年代にはほぼ完成の域に到達したと言える．それゆえ近年では大多数の研究者たちがこれら典型的な枠組みからより発展的な問題へと研究対象を移している．それらは，例えば，非線形問題，ランダムポテンシャル，磁場ポテンシャル，逆問題，多様体上や離散空間上の作用素などである．このような研究対象の変遷は例えば熱方程式などでも見られるが，熱方程式の場合には，正則性という強い性質が多くの解の古典的な取り扱いを可能とするため，比較的早い段階で発展的枠組みへの移行が実現したと言えるだろう．とりわけ，熱核の研究は幾何学への寄与も大きく，偏微分方程式論から幾何学への応用としての，代表的な一例ともなっている．一方Schrödinger方程式では，線形問題の研究の段階で，既に，超関数論や関数解析の十分な発達を待つ必要があったため，応用に関しては今一つ出遅れていると言えるだろう．しかし，初めに述べた通り，ようやく線形Schrödinger作用素の研究が一定の到達点に達した今，まさに応用がなされるべき時期にきている．事実，ここ 20 年の間における非線形Schrödinger方程式の発展は目覚ましく，同様の発展が幾何的応用においても期待されるべきである．このような中，国内では，一部を除いて，幾何的な視点からSchrödinger 作用素を調べる研究者は多くなく，今後の発展に向けて十分な下地があるとは言い難い状況であった．

２．研究の目的

Euclid空間上のSchrödinger作用素のスペクトル・散乱理論の研究では，これまでにいくつもの強力な理論が開発され，現在では様々な状況に対応できるようになっている．しかし，幾何学的視点からの研究はそれほど進んでおらず，不十分な箇所が散見される．本研究課題では，これら既存の理論の幾何的本質を洗い出し，多様体および離散空間上でも適用可能な一般論を構成する．これを通じて，解析的手法には新たに簡潔な幾何学的視点を，幾何学には精密な解析的手法を与え，解析学と幾何学の双方の発展を促すことを目的とする．

３．研究の方法

上記の目的を実現するために，本研究課題では特に定常散乱理論および閾値共鳴に研究対象を絞り，それぞれをエンド付き多様体上および離散空間上で論じる．エンド付き多様体は近年その上での解析が盛んに調べられている幾何的対象であり，特に漸近的Euclid 型エンドおよび漸近的ファネル双曲型エンドは，ともに広がるエンドであるという意味で，遠方である種 Euclid 空間と同じ幾何的特徴を有する空間である．スペクトル・散乱理論では考えている底空間の無限遠方の形状のみが本質的役割を果たすため，これらの広がるエンドを持つ多様体上でも定常散乱理論が自然に構成できることが予想される．一方の離散空間は，連続空間の近似空間と考えることもでき，そのように考えた場合，それらの類似性・相違性が重要な研究対象となる．閾値共鳴は Euclid 空間上ですらその定式化にある種の不明瞭さを含んでいるが，本研究課題では，まだあまり詳しく調べられていない離散空間上で研究を行うことで，閾値共鳴に対する新たな視点を獲得し，それを通じてその完全な定式化を行う．

４．研究成果

(1) 定常的散乱理論

①Rellichの定理

漸近的 Euclid 型エンドや漸近的ファネル双曲型エンドを持つ多様体の上でRellichの定理を証明した．さらに中心核を持つ N 体Schrödinger 作用素に対しても Rellich の定理を証明した．Rellichの定理とは 2 乗可積分関数の空間を含むある広い重み付き空間において，一般化固有関数が存在しないことを主張する定理である．ここで考える関数空間は最良であり，これより広い空間をとることはできない．これまで 2 乗可積分関数の空間における固有関数の非存在の証明には，Mourre 型交換子によるものが知られていたが，それに本質的な改良を加えることで，扱う関数空間を最良にまで広げることに成功した．研究代表者の知る限り，Rellich の定理のこのような証明は全く新しいものである．

②極限吸収原理・放射条件評価

漸近的 Euclid 型エンドや漸近的ファネル双曲型エンドを持つ多様体の上で極限吸収原理および放射条件評価を証明した．ここでの放射条件評価における相関数には，動径変数に関するRiccati型方程式の近似解を採用し，これにより同評価をより良い自然な形に改良することができた．証明は，Fourier 解析や関数解析における高度な理論を必要とせず，前出のRellichの定理の証明に現れる古典的な重み付き交換子型評価のみを用いる．この交換子型評価はその形こそ Mourre型評価に類似するが, Mourre理論におけるような可算個の除外点が現れず，同理論の不満足な点を解決している．研究代表者の知る限り，この様な交換子評価の理論は，用いる道具こそ古典的であるが，理論としては本質的に新しいものである．これは，下の結果と合わせて，定常的散乱理論の新しい枠組みを与えている．

③スペクトル表現と定常散乱作用素

以上の結果を利用して，漸近的 Euclid 型エンドや漸近的ファネル双曲型エンドを持つ多様体の上で，Schrödinger 作用素に対するスペクトル表現を構成し，定常散乱作用素を構築した．これらは，時間に依存する散乱理論で言えば，波動作用素の存在と完全性に相当する内容である．さらに応用として，散乱作用素は異なるエンド間では必ず単射となるという事実も証明した．後者の事実は，Hempel-Post-Weder により，ある特殊な設定の下で予想されていたものであるが，我々の結果により，それは極めて一般の場合に成立する事実であることが分かった．スペクトル表現の構成には，極限レゾルベントの空間無限遠方での漸近挙動を用いる．極限レゾルベントの存在は極限吸収原理により保証され，その漸近挙動の解析には放射条件評価が用いられる．また定常散乱作用素は，内向きと外向きの両極限レゾルベントの漸近挙動を用いて定式化される．

(2) 閾値共鳴

①離散直線上での閾値共鳴

離散直線上の Schrödinger 作用素に対し，そのレゾルベントの閾値まわりでの漸近展開を計算し，非有界部分の展開係数を一般化固有関数を用いて表示した．特にこれにより，一般化固有関数に対し，その遠方での増大度のみを用いて閾値共鳴状態を定式化することに成功した．閾値共鳴状態のこのような自然な定式化は，これまで長く予想はされていたものの，完全に一般の場合には得られておらず，一般的な解決は，研究代表者が知る限り，この結果が初めてである．ここでは非局所的な摂動を扱えることにも注意しておく．この結果の証明には，Jensen-Nenciu の漸近展開スキームを最も一般の場合に適用する．このスキームはアイデアこそ初等的であるが，それを最も一般の場合に実行するには数多くの場合分けと極めて長い代数計算を必要とする．ここでは Moore-Penrose の擬逆元を利用することで，本質的でない場合分けを極力取り除き，長い計算過程には部分的に計算機の力を借りることで，展開スキームを実行しきった．

②離散半直線上での閾値共鳴

上記の結果を１次元離散半直線上でも実行し，同様に，レゾルベントの展開係数と一般化固有関数との間の関係を完全に分類した．これにより特に，閾値共鳴状態を一般化固有関数の遠方での増大度のみを用いて定式化することに成功した．ここでもやはり非局所的摂動を扱うことができることに注意する．また，証明は Jensen-Nenciu の漸近展開スキームを用いて行われる．

③多次元正方格子上の離散ラプラス作用素

多次元正方格子上の離散ラプラス作用素のレゾルベントに対し，それぞれの閾値まわりでの漸近展開を計算し，特にその分枝部分の Lauricella 超幾何関数による具体的表示を得た．現在，1 次元を除く多次元正方格子上の離散 Schrödinger 作用素に対しては，閾値共鳴状態の完全分類は未解決である．その分類のためには，まず非摂動系である離散 Laplace 作用素のレゾルベントの閾値まわりで漸近展開を得る必要があり，上述の展開はそのための重要な一ステップである．この問題は超双曲型作用素のレゾルベントの閾値まわりでの展開に類似しているが，離散ラプラス作用素に対してはレゾルベント核の特殊関数による表示が知られていないため，同じ方法で解くことは今のところできない．ここでの証明は変数変換や関数論などの初等的な道具のみを用いて行われる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① <u>K. Ito</u>, A. Jensen, Resolvent expansions for the Schrödinger operator on the discrete half-line, J. Math. Phys. 58 (2017), 052101, 査読有, DOI: 10.1063/1.4982957

② <u>K. Ito</u>, E. Skibsted, Rellich's theorem and N-body Schrödinger operators, Rev. Math. Phys. 28 (2016), 1650010 (12 pp.), 査読有 DOI: 10.1142/S0129055X16500100

③ <u>K. Ito</u>, A. Jensen, Resolvent expansion for the discrete one-dimensional Schrödinger operator, Mathematical results in quantum mechanics (2015), 253-257, 査読有

④ <u>K. Ito</u>, A. Jensen, A complete classification of threshold properties for one-dimensional discrete Schrödinger operators, Rev. Math. Phys. 27 (2015), 1550002 (45 pp.), 査読有 DOI: 10.1142/S0129055X15500026

⑤ <u>K. Ito</u>, E. Skibsted, Absence of positive eigenvalues for hard-core N-body systems, Ann. Henri Poincaré 15 (2014), 2379-2408, 査読有 DOI: 10.1007/s00023-013-0309-x

⑥ <u>K. Ito</u>, E. Skibsted, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold, Spectral and Scattering Theory and Related Topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B45 (2014), 69-75, 査読有

⑦ <u>K. Ito</u>, E. Skibsted, Absence of positive eigenvalues for hard-core N-body systems, XVIIth International Congress on Mathematical Physics (2014), 520-527, 査読有

DOI: 10.1142/9789814449243_0050

⑧ K. Ito, E. Skibsted, Absence of embedded eigenvalues for Riemannian Laplacians, Adv. Math. 258 (2013), 945-962, 査読有
DOI: 10.1016/j.aim.2013.08.023

⑨ K. Ito, S. Nakamura, Microlocal properties of scattering matrices for Schrödinger equations on scattering manifolds, Anal. PDE 6 (2013), 257-286, 査読有
DOI: 10.2140/apde.2013.6.257

〔学会発表〕（計 37 件）

① K. Ito, Resolvent expansions for the Schrödinger operator on the discrete half-line, HMA セミナー・冬の研究会 2017, 2017.1.20, 広島大学（広島県）

② K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends (4 回講演), Tokyo-Berkeley Mathematics Workshop "Partial Differential Equations and Mathematical Physics", 2017.1.9-12, 東京大学（東京都）

③ K. Ito, Branching form of the resolvent at threshold for discrete Laplacians, 研究集会「第 27 回 数理物理と微分方程式」, 2016.11.26, かんぽの宿 富山（富山県）

④ K. Ito, Branching form of the resolvent at threshold for discrete Laplacians, QMath13: Mathematical Results in Quantum Physics, 2016.10.9, Georgia (USA)

⑤ K. Ito, Branching form of the resolvent at threshold for discrete Laplacians, Math/Phys Seminar, 2016.8.18, Aarhus (Denmark)

⑥ K. Ito, Interpretation of complex resonances (and a remark on Rellich's theorem), RIMS 共同研究「線形及び非線形分散型方程式に関する最近の進展」, 2016.5.19, 京都大学（京都府）

⑦ K. Ito, Asymptotic behavior of eigenfunctions on manifold with ends, 微分トポロジーセミナー, 2015.11.17, 京都大学（京都府）

⑧ K. Ito, A remark on Rellich's theorem, 波動セミナー, 2015.11.9, 北海道大学（北海道）

⑨ K. Ito, A remark on Rellich's theorem, 研究集会「第 26 回 数理物理と微分方程式」, 2015.11.1, ニューサンピア姫路ゆめさき（兵庫県）

⑩ K. Ito, A complete classification of threshold properties for one-dimensional discrete Schrödinger operators, Young Researchers Symposium, 2015.7.24, Santiago (Chile)

⑪ K. Ito, Complete classification of threshold properties for one-dimensional discrete Schrodinger operators, Topics in Analysis and Mathematical Physics, A conference in honor of Arne Jensen's 65th birthday, 2015.5.30, Aalborg (Denmark)

⑫ K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends (LAP and RC), 偏微分方程式姫路研究集会, 2015.3.7, イーグレ姫路（兵庫県）

⑬ K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends, 第 7 回名古屋微分方程式研究集会 (The 7th Nagoya Workshop on Differential Equations), 2015.3.4, 名古屋大学（愛知県）

⑭ K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends, 熊本大学応用解析セミナー, 2014.12.13, 熊本大学（熊本県）

⑮ K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends, 第 3 回 信州関数解析シンポジウム, 2014.12.2, 信州大学（長野県）

⑯ K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends, 東京大学火曜解析セミナー, 2014.11.25, 東京大学（東京都）

⑰ K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends, 研究集会「第 25 回 数理物理と微分方程式」, 2014.11.1, 四季の湯強羅静雲荘（神奈川県）

⑱ K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends, 第 20 回南大阪応用数学セミナー, 2014.10.25, 大阪市立大学（大阪府）

⑲ K. Ito, Absence of B_0^*-eigenfunctions and LAP on manifold with ends, RIMS 研究集会「スペクトル理論とその周辺 (Spectral and Scattering Theory and Related Topics)」, 2014.10.17, 京都大学（京都府）

⑳ K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends, NLPDE セミナー, 2014.10.10, 京都大学（京都府）

21 K. Ito, Absence of B_0^*-eigenfunctions and LAP on manifold with ends, RIMS 研究集会「偏微分方程式に付随する確率論的問題」, 2014.9.19, 京都大学（京都府）

22 K. Ito, Stationary scattering theory on manifold with ends（4 回講演）, RIMS 共同研究「多様体・格子・グラフ上のシュレディンガー方程式のスペクトル・散乱理論」, 2014.9.10-12, 京都大学（京都府）

23 K. Ito, Absence of B_0^*-eigenfunctions and LAP on manifold with ends, Analysis Seminar,

2014.8.20, Aarhus (Denmark)
24 K. Ito, Absence of B_0^*-eigenfunctions and LAP on manifold with ends, 偏微分方程式セミナー, 2014.7.28, 北海道大学（北海道）
25 K. Ito, Absence of B_0^*-eigenfunctions and LAP on manifold with ends, 愛媛大学解析セミナー, 2014.6.21, 愛媛大学（愛媛県）
26 K. Ito, Absence of B_0^*-eigenfunctions and LAP on manifold with ends, RIMS 共同研究「線形および非線形分散型方程式に関する最近の進展」, 2014.5.21, 京都大学（京都府）
27 K. Ito, Absence of B_0^*-eigenfunctions and LAP on manifold with ends, 大阪大学数学教室微分方程式セミナー, 2014.5.16, 大阪大学（大阪府）
28 K. Ito, Absence of B_0^*-eigenfunctions for the Schrödinger operator on manifold with ends, 神戸大学理学研究科数学教室談話会, 2014.4.16, 神戸大学（兵庫県）
29 K. Ito, Classification of threshold properties of one-dimensional discrete Schr\"odinger operators, 日本数学会 2014 年度年会, 函数解析学分科会特別講演, 2014.3.15, 学習院大学（東京都）
30 K. Ito, Threshold properties of one-dimensional discrete Schrödinger operators, 筑波大学解析セミナー, 2014.3.5, 筑波大学（茨城県）
31 K. Ito, Threshold properties of one-dimensional discrete Schrödinger operators, 解析セミナー, 2014.2.10, 神戸大学（兵庫県）
32 K. Ito, Threshold properties of one-dimensional discrete Schrödinger operators, 東京大学火曜解析セミナー, 2014.1.14, 東京大学（東京都）
33 K. Ito, Threshold properties of one-dimensional discrete Schrödinger operators, 研究集会「スペクトル・散乱鹿児島シンポジウム」, 2014.1.11, 鹿児島大学（鹿児島県）
34 K. Ito, Threshold properties of one-dimensional discrete Schr\"odinger operators, 研究集会「第 24 回 数理物理と微分方程式」, 2013.11.3, 星と森のロマントピア（青森県）
35 K. Ito, Threshold properties of one-dimensional discrete Schrödinger operators, 研究集会「Linear and Nonlinear Waves, No.11」, 2013.10.31, ピアザ淡海滋賀県立県民交流センター（滋賀県）
36 K. Ito, Threshold properties of one-dimensional discrete Schrödinger operators, 応用数学セミナー, 2013.10.3, 東北大学（宮城県）
37 K. Ito, Threshold properties of one-dimensional discrete Schrödinger operators, RIMS 共同研究「線形および非線形分散型方程式の研究」, 2013.5.21, 京都大学（京都府）

６．研究組織
(1)研究代表者
伊藤　健一（ITO, Kenichi）
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90512509