様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年 　５ 月 １７ 日現在

機関番号： １３１０１
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2013～2014
課題番号： ２５８０００７５

研究課題名（和文） 保存則方程式系における一意可解性問題についての研究

研究課題名（英文） Study on the existence and uniqueness of solutions for systems of conservation laws

研究代表者
應和　宏樹（OHWA, HIROKI）

新潟大学・自然科学系・助教

研究者番号：１０５４９１５８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：1次元n×n保存則方程式系の初期値問題の可解性を示す方法の1つとして有名であるA. Bressan (1992), N. H. Risebro (1993)による波面追跡法の簡略化を行い，その方法を適用することで十分小さな全変動量をもつ初期値に対する初期値問題の可解性定理をより厳密なものとして示した．さらに，その解の一意性についての研究を行うための準備として，ある区分的に線形な不連続関数の性質について考察し，その不連続のクラスの分類を試みることで，その関数の周期的な性質に関する結果を得た．

研究成果の概要（英文）：A proof of global existence of solutions with small total variation, to the Cauchy problem for one-dimensional n×n systems of conservation laws is appeared in the papers of A. Bressan (1992) and N. H. Risebro (1993). The proof relies on the wave-front tracking method. The wave-front tracking method is one of the famous methods of the proof. We give a simple argument in the wave-front tracking method and clearly prove the global existence of solutions for those systems. Moreover, as preparations to study the uniqueness of the solutions, we classify the discontinuities and obtain periodic properties of some piecewise linear functions.

研究分野： 偏微分方程式論

キーワード： 実解析　保存則方程式　非線形現象

１．研究開始当初の背景

１次元 n×n 保存則方程式系とは，空間座標 x と時刻 t に依存する量 $U\in\boldsymbol{R}^n$ とベクトル場 $F:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ に関する次の方程式系のことである：

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0.$$

数理科学の様々な分野において，各種物理量の時間発展はそれら物理量の保存則方程式から導かれる複数の非線形偏微分方程式（保存則方程式系）で記述される．保存則方程式系の研究は 1950 年代から多くの研究者によって行われてきたが，方程式の簡潔さに反して，その系統的な結果は未だに得られていない．こうしたことから，保存則方程式系の研究は今後の発展に期待されており，学術的に大きな意義を持つ研究課題であると言える．

１次元保存則方程式系の Riemann 問題とは，自己相似な型の初期値

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L,\ x<0 \\ U_R,\ x>0 \end{cases}$$

（U_L, U_Rは定ベクトル）

に対する保存則方程式系の初期値問題のことであり，急激に圧縮された気体の運動モデルと同一である．1 次元 n×n 保存則方程式系に対する $|U_L - U_R|$ が十分小さいときの Riemann 問題の一意可解性については，1957 年に P. D. Lax が示している．このときの Riemann 問題の解を基本的な道具として用いれば，全変動が十分小さい初期値に対する保存則方程式系の一般の初期値問題の一意可解性を示すことができる．このように一般の初期値問題と深い関係をもつ Riemann 問題であるが，1 次元 n×n 保存則方程式系に対する $|U_L - U_R|$が大きいときの一意可解性については未解決である．

１ 次元 2×2 保存則方程式系に対する $|U_L - U_R|$が大きいときの Riemann 問題の一意可解性については，1960 年代後半から 80 年代にかけての J. A. Smoller と J. L. Johnson による一連の結果が有名である．研究代表者は，J. A. Smoller と J. L. Johnson による一連の結果の不備を見つけ，反例を用いることでそれを指摘し，これらの結果の拡張を意識した方法により再証明を与えた(2009)．さらに，この証明方法を拡張することにより，凸性に関する条件（これは長年，$|U_L - U_R|$が大きいときの 1 次元 2×2 保存則方程式系の Riemann 問題の一意可解性の証明において必ず必要とされていた条件である）を仮定せずに Riemann 問題の一意可解性を示した(2010, 2011)．なお，これらの証明方法を基本的な道具として用いれば，1 次元 n×n 保存則方程式系の初期値問題の可解性を示す方法の１つとして有名である A. Bressan(1992), N. H. Risebro(1993)による波面追跡法（the wave-front tracking method）における議論を 1 次元 2×2 保存則方程式系に対して簡略化することができる．

２．研究の目的

本研究課題の目的は，1 次元 2×2 保存則方程式系の Riemann 問題の解の構造理論の進展を図るとともに，その構造理論を用いることで，1 次元 2×2 保存則方程式系の一般の初期値問題の可解性についての研究を行うことである．さらに，Riemann 問題の解の構造理論を用いることで，区分的に線形な不連続関数の性質についての考察を行い，平滑性を引き起こすクラスの提案を目指すことで，1 次元 2×2 保存則方程式系の一般の初期値問題の解の一意性問題の解決への糸口を探る．以下で研究の目的について研究項目ごとに述べる．

(1) Riemann 問題について

Riemann 問題の一意可解性は，衝撃波曲線（shock curve）の幾何学的性質と大きく関与している．その性質を用いることで，1 次元 2×2 保存則方程式系の Riemann 問題の一意可解性における証明手法の一般化を行い，Riemann 問題の解の構造理論の進展を図る．さらに，その構造理論と粘性項消滅法（the vanishing viscosity method）,かつ発展方程式論的方法を組み合わせることで，1 次元 2×2 保存則方程式系の Riemann 問題の一意可解性についての研究を行う．

(2) 一般の初期値問題について

Riemann 問題の解構造を用いることで，1 次元 2×2 保存則方程式系の一般の初期値問題の解の不連続の数と相互作用の回数を評価する方法の簡略化，及び一般化を目指す．さらに，その方法を用いることで，様々な 1 次元 2×2 保存則方程式系の一般の初期値問題の可解性を示す．

(3) 区分的に線形な不連続関数の考察

一般的に，区分的な線形な不連続関数は非線形微分方程式の解の近似理論において重要な役割を担っており，1 次元 2×2 保存則方程式系においても例外ではない．実際，波面追跡法においても区分的に線形（定数）な不連続関数は重要な役割を担っている．本研究課題では，Riemann 問題の解の構造理論を用いることで，区分的に線形な不連続関数の性質について考察し，平滑性を引き起こすクラスの提案を目指すことで，1 次元 2×2 保存則方程式系の一般の初期値問題の解の一意性問題の解決への糸口を探る．また，必要に応じて，微分位相幾何学（トポロジー）的アプローチも用いて，この研究課題に取り組む．

３．研究の方法

以下で研究の方法について研究項目ごとに述べる．

(1) Riemann 問題について

上述の通り，Riemann 問題の一意可解性は，衝撃波曲線の幾何学的性質と大きく関与している．研究代表者は大学院時代から１次元 2×2 保存則方程式系の衝撃波曲線の研究を行ってきた．その研究成果を活かすことで，１次元 2×2 保存則方程式系の Riemann 問題の一意可解性における証明手法の一般化を行い，Riemann 問題の解の構造理論の進展を図る．さらに，その構造理論と C. M. Dafermos による粘性項消滅法，かつ A. Bressan らの一連の研究グループによるリプシッツ作用素半群の理論（Bressan 理論）を組み合わせることで，１次元 2×2 保存則方程式系の Riemann 問題の一意可解性についての研究を行う．

(2) 一般の初期値問題について

１次元 n×n 保存則方程式系の初期値問題の可解性を示す方法の１つとして有名である波面追跡法とは，対応する Riemann 問題を近似的に解くことを繰り返し，初期値問題の近似解を時間大域的に構成する方法である．この方法で特に問題となるのが，解の不連続の数と相互作用の回数の評価である．これらの評価式を得るために様々な改善方法が提示されているが，いずれの証明方法も複雑なため，その証明方法を理解することは容易でない．本研究課題では，Riemann 問題の解構造を用いた新しい汎関数を導入し，新たな評価式を得ることで，１次元 2×2 保存則方程式系の一般の初期値問題の解の不連続の数と相互作用の回数を評価する方法の簡略化，及び一般化を目指す．さらに，その方法を用いることで，様々な１次元 2×2 保存則方程式系の一般の初期値問題の可解性を示す．

(3) 区分的に線形な不連続関数の考察

上述の通り，区分的な線形な不連続関数は非線形微分方程式の解の近似理論において重要な役割を担っており，波面追跡法においても区分的に線形（定数）な不連続関数は重要な役割を担っている．また，１次元 n×n 保存則方程式系の一般の初期値問題の解の一意性問題の解決への糸口を探るためには，その（近似）解の不連続の分類を明確にし，平滑性を引き起こすクラスを提案する必要がある．しかし，一般の初期値問題の解構造は大変複雑であるため，その（近似）解の不連続の分類を明確にすることは容易でない．本研究課題では，１次元 2×2 保存則方程式系の一般の初期値問題の一意性問題に焦点をしぼり，Riemann 問題の解の構造理論を用いることで，区分的に線形な不連続関数の性質について考察し，平滑性を引き起こすクラスの提案を目指すことで，その解の一意性問題の解決への糸口を探る．なお，あくまでも個人的な予想ではあるが，この課題を克服するためには解析学の枠組みだけには留まらず，微分位相幾何学的アプローチが有効だと思われるので，微分位相幾何学の分野にも注目し，この研究課題に取り組む．

４．研究成果

本研究課題で得られた研究成果（現在，投稿中のものも含む）は主に以下の２つである．

(1) 一般の初期値問題について

１次元 n×n 保存則方程式系の初期値問題の可解性については，A. Bressan(1992)，N. H. Risebro(1993)による波面追跡法を用いた結果が有名である．しかし，その証明手法は複雑なため理解が難しく，さらには，厳密とは言い難い部分もある．本研究課題では，１次元 2×2 保存則方程式系の Riemann 問題の一意可解性の研究で得られた構造理論を一般の初期値問題に適用することで，１次元 2×2 保存則方程式系に対する波面追跡法の簡略化を行い，全変動が十分小さい初期値に対する初期値問題の可解性についての証明を与えた．さらに，この簡略化された波面追跡法を１次元 n×n 保存則方程式系に対しても適用できるように改善し，新たな評価式を得ることで，全変動が十分小さい初期値に対する初期値問題の可解性についての証明を与えた．なお，この方法では A. Bressan による波面追跡法において証明のキーとなっていた生成指数（generation order）の概念を用いないため，今まで必要とされていた多くの複雑な相互作用評価を示す必要がなくなる．したがって，この方法を用いることで，様々な１次元 n×n 保存則方程式系の一般の初期値問題の可解性を容易に示すことができると期待される．

(2) 区分的に線形な不連続関数について

波面追跡法では，区分的に線形（定数）な不連続関数を用いて近似解を構成し，その近似解の部分列を（厳密）解に収束させるため，近似解の部分列の構成の仕方によっては収束先が一意でない可能性がある．このような可能性を排除し，１次元 n×n 保存則方程式系の初期値問題の解の一意性を示す足掛かりを得るためには，区分的に線形な不連続関数の性質について考察し，その不連続のクラスを分類する必要がある．本研究課題では，このような問題に取り組む過程の中で，ある区分的に線形な不連続関数の周期的な性質に関する結果を得た．さらに，この証明手法を改善することで，より一般の区分的に線形な

不連続関数の周期的な性質に関する結果も得た．連続関数の周期的な性質については，1960 年代から多くの研究者によって行われてきたが，不連続関数の周期的な性質に関しては，ほとんど何も知られていない．したがって，これらの研究成果が不連続関数の周期的な性質に関して先駆け的結果であるものと思われる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

① Satomi Murakami, Hiroki Ohwa, Periodic points of some discontinuous mappings, American Mathematical Monthly，査読有，印刷中．

〔学会発表〕（計 1 件）

① 應和 宏樹，n×n 双曲型保存則方程式系に対する波面追跡法について，日本数学会年会，2014 年 3 月 18 日，学習院大学目白キャンパス（東京都豊島区目白）．

６．研究組織

(1)研究代表者

應和 宏樹（OHWA HIROKI）
新潟大学・自然科学系・助教
研究者番号：10549158