

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 13 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800079

研究課題名(和文)粘性流体の織りなす局所構造と非局所構造の数学解析

研究課題名(英文) Mathematical Analysis for local and nonlocal structures in viscous flows

研究代表者

前川 泰則 (MAEKAWA, Yasunori)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：70507954

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では流体力学の基礎方程式であるNavier-Stokes方程式について数学的な研究を行った。特に、境界が流体の渦度場の局所的・大域的構造に与える影響について研究を行った。本研究により、初期渦度場の分布と非粘性極限における境界層の安定性、2次元外部領域におけるNavier-Stokes方程式の解の時間大域挙動の解明、2次元回転物体周りの流れの安定性、3次元半空間Navier-Stokes方程式の渦度場方向ベクトルと解の滑らかさの関係、2次元半空間非圧縮性粘性流体の渦度場に対する境界条件の考察とその応用、など多くのテーマについて成果を挙げることができた。

研究成果の概要(英文)：This research project is aimed to achieve the understanding of mathematical structure of solutions to the Navier-Stokes equations for viscous incompressible flows, which are fundamental equations in fluid dynamics. This project has revealed various important structures of vorticity fields for the Navier-Stokes flows: the stability of boundary layer when the initial vorticity is located away from the boundary, the asymptotic behavior of solutions to the Navier-Stokes equations in two-dimensional exterior domains, the asymptotic stability of some stationary solutions to the exterior flows around a rotating disk, regularity criterion for the three-dimensional Navier-Stokes equations in the half space under the condition of vorticity direction and type I blow-up, the vorticity boundary condition in the half plane and its applications.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：Navier-Stokes方程式 流体力学 渦度場 境界層 解の漸近挙動

1. 研究開始当初の背景

水や空気などの流体は流体自身の変形に伴う抵抗が考慮される場合、粘性流体として取り扱われる。例えば固形物の境界付近における流れなど、より現実的な問題に取り組む上で粘性流体は最も基本的かつ重要な概念である。粘性流体の運動はNavier-Stokes方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式により記述され、理学・工学の各分野から盛んに研究されている。しかしながら、その複雑な非線形性のため、例えば3次元Navier-Stokes方程式の時間大域的可解性といった数学的に基本的な問題を含め、今なお解明されていない問題が多い。数学解析、数値解析の両面において困難を引き起こしている要因の一つに、ある点での流体の運動が他の全ての点における流体の運動に複雑に依存している非局所性が挙げられる。この非局所性は、粘性により引き起こされる拡散効果のみならず、非圧縮性流体の圧力場に見られるように方程式独自の構造に起因している。このように方程式が非局所性を持つ一方で、発達した乱流に現れる渦管構造(強い渦度場が管状に分布した構造)や境界付近での高Reynolds数の流れが呈する境界層の形成と剥離など、流体の運動には特徴的な局所構造が現れることも多い。こうした現象は流体の大域的・非局所的な構造と局所的な構造の間に数理的なメカニズムが潜んでいることを示唆しており、その全容を数学的に解き明かしていくことは複雑な流体の運動を理解する上で重要な課題となっていた。

2. 研究の目的

(1) 非圧縮性粘性流体の場合、渦度場に対して詳細な解析を施せる状況は、これまでのところ全空間のように非自明な境界の影響が現れない場合に限られることが多く、境界を本質的に考慮しなければならない問題においては、渦度場に対する基礎研究自体不足していた。本研究では、非圧縮性粘性流体渦度場の満たす境界条件を数学的に正当化し、かつ境界付近における渦度場の構造をその境界条件

をもとに解析することである。

(2) 非圧縮性条件を満たすベクトル場自体の構造を理解することは流体力学において基本的なテーマである。本研究では半空間の場合に知られていたStokes半群に対するUkaiの公式やUkai射影作用素をより一般の領域に対して拡張することを目的とする。

(3) スケール臨界の空間減衰を持つ2次元外部領域の非圧縮性粘性流体の時間大域的挙動及び安定性について研究する。

3. 研究の方法

(1) 渦度場の境界条件をもとに2次元半空間におけるStokes流の渦度場に対して定量的な評価を与え、また、初期渦度場の分布の仕方が非粘性極限における渦度場の挙動に与える影響について実解析手法を用いて考察する。

(2) Ukai射影作用素の構造について再検討を行い2階楕円型作用素のDirichlet-Neumann写像との関係に着目する。

(3) 弱 L^2 空間の関数に対して成り立つ定量的評価やスペクトル解析を駆使してスケール臨界下にある2次元流体の構造について調べる。

4. 研究成果

(1) 2次元半空間における非圧縮性粘性流体の渦度場の境界条件及び内部での方程式を直接解析することにより、初期渦度場が境界から離れて分布しているならば、時間局所的に非粘性極限がEuler流とPrandl境界層により記述されることを厳密に証明した；Maekawa (2014, CPAM). 非自明な境界のある非粘性極限問題は一般に大変難しい問題であり、本研究は渦度方程式を直接解析することにより非粘性極限を正当化した最初の論文である。また、渦度場の境界条件を用いて、渦度場の方向ベクトルに関する付加的な仮定の下で、3次元半空間におけるNavier-Stokes方程式の解はtype I型の爆発を起こさないことを証明した；Giga-Maekawa-Hsu (CPDE, 2014). この結果は、Navier-Stokes方程式の解に対して境界付近におけるtype I型の爆発可能性を否定した最初の論文であり、境界付近での渦度の生成とも関連した学術的意義の高い成果である。

(2) 発散型2階楕円型作用素に付随するPoisson作用素とDirichlet-Neumann写像によるfactorization定理を証明し、それをもとに境界がグラフで書ける非有界領域においてある関数空間におけるHelmholtz分解定理を確立した；Maekawa-Miura (Math. Ann, 2014). さらに、同様の関数空間においてUkai射影作用素の構成に成功した；

Maekawa-Miura (preprint, 2015). これらは Navier-Stokes 方程式の解構造に対して一般的な知見を与えるものである。本研究で得られた非圧縮性ベクトル場の構造定理は、今後解の時間無限大での挙動に対して応用されることが期待される。

(3) 弱 L^2 空間に初期値をとる 2 次元外部領域 Navier-Stokes 方程式の時間大域挙動を考察し、小さな自己相似型の解が任意の L^2 摂動に対して L^2 空間の位相で漸近安定であることを証明した; Gallay-Maekawa (APDE, 2013), Maekawa (Analysis, 2015).

また、2 次元回転物体周りの流れの数学的存在証明に成功し; Higaki-Maekawa-Nakahara (preprint, 2016), 特に回転物体が単位円の場合に得られる厳密定常解の L^2 初期摂動に対する安定性を証明した; Maekawa (preprint, 2015). 一般に、スケール臨界に属する 2 次元流体の安定性を示すことは難しく、本研究はこの分野において先駆的な結果を与えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

Y. Maekawa, H. Miura, On Poisson operators and Dirichlet-Neumann maps in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ for divergence form elliptic operators with Lipschitz coefficients, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有, 368, 2016, 6227-6252.

Y. Maekawa, On asymptotic stability of global solutions in weak L^2 space for the two-dimensional Navier-Stokes equations, Analysis: International mathematical journal of analysis and its applications, 査読有, 35, 2015, 245-257.

H. Takeda, Y. Maekawa, S. Kawashima, Asymptotic profile of solutions to a hyperbolic Cahn-Hilliard equation, Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica, 査読有, 10, 2015, 479-539.

Y. Giga, P.-Y. Hsu, Y. Maekawa, A Liouville theorem for the planar Navier-Stokes equations with the no-slip

boundary condition and its application to a geometric regularity criterion, Comm. Partial Differential Equations, 査読有, 39, 2014, 1906-1935.

⑤ Y. Maekawa, On the inviscid limit problem of the vorticity equations for viscous incompressible flows in the half plane, Comm. Pure and Applied Math., 査読有, 67, 2014, 1045-1128.

Y. Maekawa, H. Miura, Remark on the Helmholtz decomposition in domains with noncompact boundary, Math. Ann., 査読有, 359, 2014, 1077-1095.

Y. Maekawa, H. Miura, On fundamental solutions for non-local parabolic equations with divergence free drift, Advances in Mathematics, 査読有, 247, 2013, 123-191.

Th. Gallay, Y. Maekawa, Long-time asymptotics for two-dimensional exterior flows with small circulation at infinity, Analysis and PDE, 査読有, 6, 2013, 973-991.

P.-Y. Hsu, Y. Maekawa, On nonexistence for stationary solutions to the Navier-Stokes equations with a linear strain, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 査読有, 15, 2013, 317-333.

[学会発表](計 28 件)

Y. Maekawa, On the Navier-Stokes flows around a rotating obstacle in two-dimensions, The Navier-Stokes Equations and Related Topics, 2016 年 3 月 7 日-2016 年 3 月 11 日, 名古屋大学(名古屋市).

Y. Maekawa, On the Navier-Stokes flows around a rotating obstacle in two-dimensions, Boundary Layers and Fluid / Structure interactions, 2016 年 1 月 11 日-2016 年 1 月 14 日, Bordeaux (France).

Y. Maekawa, On stability of scale-critical circular flows in a two-dimensional exterior domain, Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and

Computation, 2015年8月16日-2015年8月18日, 札幌コンヴェンションセンター(札幌市)

Y. Maekawa, Analysis of incompressible flows in unbounded domains, Mathematical Fluid Dynamics, Autumn School and Workshop, 2014年10月27日-2014年10月30日, Bad Ball (Germany).

⑤Y. Maekawa, On Long-time asymptotics of the Navier-Stokes flow in a twodimensional exterior domain, Vorticity, Rotation and Symmetry (III), 2014年5月5日-2014年5月9日, Luminy (France).

Y. Maekawa, On vorticity formulation of the Navier-Stokes flows in \mathbb{R}^2_+ and its application to the inviscid limit problem, SIAM conference on Analysis of Partial Differential Equations, 2013年12月8日-2013年12月10日, Florida (USA).

Y. Maekawa, Long-time asymptotics for two-dimensional exterior flows with small circulation at infinity, Fourth Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 2013年9月18日-2013年9月20日, 東京工業大学(東京)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

前川 泰則 (MAEKAWA YASUNORI)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70507954

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：