2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１８００１

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：２５８０００８２

研究課題名（和文）線形微分方程式の解の大域挙動とモノドロミ保存変形に関する研究

研究課題名（英文）Studies on global behavior of solutions to linear differential equations and isomonodromic deformations

研究代表者

眞野　智行（MANO, Toshiyuki）

琉球大学・理学部・准教授

研究者番号：６０３７８５９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では主に次の2つのテーマを中心として研究を行った。(1)有理関数近似を用いた線形微分方程式の変換の構成とその応用 (2)大久保型微分方程式のモノドロミ保存変形と平坦構造
(1)は主に津田照久氏との共同研究であり、エルミート・パデ近似を用いて線形微分方程式のシュレジンガー変換を構成し、モノドロミ保存変形の解についての行列式構造を得た。(2)は主に加藤満生氏・関口次郎氏との共同研究であり、大久保型方程式のモノドロミ保存変形と平坦構造との関係を明らかにし、応用として複素鏡映群の軌道空間上の平坦構造やパンルヴェ方程式の解のポテンシャルベクトル場による表示などの結果を得た。

研究成果の概要（英文）：In this study, we mainly treated the following two subjects:1)Construction of transformations for linear differential equations by means of rational approximations. 2) Isomonodromic deformations of Okubo systems and flat structures.
1) is based on joint works with Teruhisa Tsuda.We constructed Schlesinger transformations for linear differential equations by means of Hermite-Pade approximation and obtained determinant structures for solutions to isomonodromic deformations. 2) is based on joint works with Mitsuo Kato and Jiro Sekiguchi. We clarified the relation between isomonodromic deformations of Okubo systems and flat structures. As its application, we obtained flat structures on the orbit spaces of complex reflection groups and descriptions of solutions to the Painleve equation in terms of potential vector fields.

研究分野：数学

キーワード：モノドロミ保存変形　有限鏡映群　有理関数近似

１．研究開始当初の背景

パンルヴェ方程式とは P. Painleve らにより動く特異点をもたない２階常微分方程式を分類する過程で発見された非線形微分方程式であり、数学の他の分野や数理物理に関連・応用を持つ重要な対象である。パンルヴェ方程式は R. Fuchs 等により２階線形微分方程式のモノドロミ保存変形から導出されることが示された。これはパンルヴェ方程式と線形微分方程式の大域問題を結びつける結果であり、非常に重要な観点である。現在では、パンルヴェ方程式の一般化や拡張と言うべきたくさんの微分方程式が発見されている。このような一般化の構成の仕方としては、モノドロミ保存変形を考える線形微分方程式をより一般のものに取り換えること(ガルニエ系や神保-三輪-上野によるシュレジンガー系の一般化等)や、あるいはパンルヴェ方程式の対称性を利用したり無限可積分系との関係を利用する方法がある(日本でも多くの研究者による研究がある)。
しかし高階線形微分方程式のモノドロミ保存変形についてはその定式化以上の研究は、割と最近までほとんどなされていなかったように思われる。これは高階線形微分方程式についてその構造があまり理解されていなかったことが一因であると考えられる。しかし N. Katz によるミドルコンボリューションを用いたリジッド局所系の研究などを一つの契機として、最近では非リジッド局所系も含めた高階線形微分方程式の組織的研究が進展している。パンルヴェ方程式の一般化に関わるところでは、Deligne-Simpson 問題と絡んだ線形微分方程式の分類に関する(大島利雄氏による)結果を利用して、モノドロミ保存変形から来る４階パンルヴェ型微分方程式の分類の研究が坂井秀隆氏らによってなされている。それでもなお線形微分方程式の解の大域挙動の研究は大変難しい問題であるが、そのうち何らかの構造により「大域挙動が分かる」微分方程式を特徴づけるという方向の研究が原岡喜重氏(“大域解析可能な Fuchs 型方程式” 数学 63 巻 (2011), 257-280.)らによって進展している。

２．研究の目的

本研究課題の目的は、高階線形微分方程式の解の大域挙動およびモノドロミ保存変形の研究に独自の視点を持ち込み、興味ある具体例の構成・新たな問題の提起・関連する分野との新たな関係の模索等により、当該研究分野および周辺分野の研究発展および活性化を促すことである。また本研究課題は研究代表者のそれまでの研究成果にもとづいた独自性の強いものである。
以下では、より具体的な研究目的について述べる。

(1) Wirtinger 積分の詳細な研究および多重 Wirtinger 積分の構成。研究代表者はそれまでの研究においてテータ函数の冪積の積分(Riemann-Wirtinger 積分)についてテータ関数の零点の位置を n 等分点に制限することで、1 次元複素トーラスの周期を変数とする常微分方程式を満たすことを示した。この常微分方程式はレベル n のモジュラー変換に関する保型性をもち、レベル n のモジュラー曲線上のフックス型線形微分方程式が構成できる。特にレベルが 5 以下の時はモジュラー曲線は有理曲線となり、大域挙動が記述可能でありながらも非リジッドな高階線形微分方程式の例を与える。これは非常に興味深い対象であり、その具体的表示・モノドロミ表現の特徴づけ等についての詳細な研究を行う。また複素トーラスのいくつかの直積を取ることによりその多重積分への一般化を考察する。予備的考察により、2 重積分の場合は Dotsenko-Fateev の方程式と一致することが分かっている。3 重以上の場合は新しいものが出てくる可能性があるため大域挙動の研究可能な高階線形微分方程式の例として興味深い。これらの具体例の詳細な研究を行う。

(2) 高階線形微分方程式のシュレジンガー変換に対するアルゴリズムの構成と近似理論および可積分系との関連についての模索。研究代表者はすでに 2 階線形微分方程式のシュレジンガー変換とパデ近似の関係を明らかにし、その応用としてガルニエ系の解の行列式構造についての結果を得ていた。本研究課題では近似問題をうまく拡張して高階線形微分方程式のシュレジンガー変換の構成を行う。またこれを用いて一般のモノドロミ保存変形の解の行列式構造を明らかにする。特に一橋大の津田照久氏により発見された UC 階層と呼ばれる無限可積分系からの特殊化によって現れる高階線形微分方程式のモノドロミ保存変形の特殊解の構成にこの結果が応用できることが期待される。
これらのことを明らかにすることが目的である。

３．研究の方法

高階線形微分方程式のシュレジンガー変換を生成するアルゴリズムの構成とそれを利用したモノドロミ保存変形の解の行列式公式の導出を中心的なテーマとして研究を行う。研究代表者はすでに論文「Determinant formula for solutions of the Garnier system and Pade approximation」J. Phys. A, 45 (2012), 14pp. において、２階フックス型線形微分方程式のシュレジンガー変換を生成するアルゴリズムがパデ近似によって記述され、それによりガルニエ系の一般解が行列式構造を持つということを明らかにした。同様のことを不確定特異点も許した全く一般

の高階線形微分方程式について行うのが目標である。これは津田照久氏の構成した UC 階層の特殊化から得られるモノドロミ保存変形の超幾何解の行列式構造を調べる有効に利用できることが期待される。これについて津田氏と共同研究を行う。次にここまでで得られたシュレジンガー変換の構成を利用して、モノドロミ保存変形の解の行列式公式の導出を行う。線形微分方程式のシュレジンガー変換をモノドロミ保存変形の解と結びつける際には、行列式に関する様々な公式を用いる必要があることが予期されるが、行列式の理論について研究代表者は専門外であるため、その専門家である琉球大(当時)の石川雅雄氏に助力を仰ぎ効率よく研究を進める。
また Wirtinger 積分およびその多重積分化については高次元複素トーラス上の積分について研究している北見工業大の渡辺文彦氏と協力して研究を進める。

４．研究成果

本研究では主に次の 2 つのテーマを中心として研究成果を得た。(1)有理関数近似を用いた線形微分方程式のシュレジンガー変換の構成とその応用 (2)大久保型微分方程式のモノドロミ保存変形と平坦構造の関係について
(1)は主に一橋大学の津田照久氏との共同研究であり、エルミート・パデ近似を用いて線形微分方程式のシュレジンガー変換を構成し、UC 階層から得られるモノドロミ保存変形の超幾何型特殊解についての行列式構造と多重積分による積分表示を得た。この結果について国内外の複数の研究集会などで講演を行い、また論文として国際学術誌に掲載された。次に不確定特異点を含む線形微分方程式のモノドロミ保存変形の解のτ関数についての行列式構造を得た。τ関数はモノドロミ保存変形に関する基本的な量であり、この構造が有理函数近似を用いて自然に記述されたことの意義は大きい。今後可積分系などとの関わりも含めてさらなる発展の基礎となることが期待できる。(2)は主に加藤満生氏・関口次郎氏との共同研究であり、大久保型微分方程式のモノドロミ保存変形と平坦構造との関係を明らかにし、応用として複素鏡映群の軌道空間上の平坦構造や第 6 パンルヴェ方程式の解のポテンシャルベクトル場による表示などの結果を得た。特に(2)については当初の研究計画の段階ではまったく予想されていなかった進展である。これは従来独立に研究されていた分野を密接に結びつけるものであり、今後様々な分野に大きな影響を与え、さらなる発展が期待できる成果である。この成果についても国内外の多くの研究集会等で講演を行い、関連する複数の論文を執筆した。

５主な発表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① Mitsuo Kato, <u>Toshiyuki Mano</u> and Jiro Sekiguchi, Flat structures and algebraic solutions to Painleve VI equation, Trend in Mathematics series, 査読有, 2017, 印刷中(掲載確定)
http://www.springer.com/series/4961

② <u>Toshiyuki Mano</u> and Teruhisa Tsuda, Hermite-Pade approximation, isomonodromic deformation and hypergeometric integral, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 285 巻, 2017, 397-431
Doi:10.1007/s00209-016-1713-y

③ Mitsuo Kato, <u>Toshiyuki Mano</u> and Jiro Sekiguchi, Flat structures without potentials, Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees, 査読有, 60 巻, 2015, 481-505
http://imar.ro/journals/Revue_Mathematique/home_page.html

④ <u>眞野智行</u>、津田照久、Hermite による２つの近似問題と Schlesinger 変換、数理解析研究所講究録別冊、査読有、B47、2014、77-86
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html

〔学会発表〕（計 15 件）

① <u>Toshiyuki Mano</u>, Regular flat structures and generalized Okubo systems, The Tenth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, 2017 年 3 月 29 日～2017 年 4 月 1 日, アセンズ(アメリカ合衆国)

② <u>眞野智行</u>、特異点の変形と複素鏡映群の平坦構造─Shephard-Todd No.23,24,27 の場合、アクセサリー・パラメーター研究会、2017 年 3 月 15 日～2017 年 3 月 17 日、熊本大学(熊本県熊本市)

③ <u>眞野智行</u>、Regular flat structures and generalized Okubo systems、RIMS 研究集会「可積分系数理の現状と展望」、2016 年 9 月 5 日～2016 年 9 月 7 日、京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

④ <u>眞野智行</u>、平坦構造の一般化と複素鏡映

群・パンルヴェ方程式、第 55 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム、2016 年 9 月 1 日～2016 年 9 月 3 日、首都大学東京(東京都八王子市)

⑤ 眞野智行、エルミート-パデ近似とパンルヴェ方程式、有理函数近似が繋ぐ可積分系・直交多項式・パンルヴェ方程式、2016 年 1 月 30 日～2016 年 1 月 31 日、一橋大学(東京都国立市)

⑥ Toshiyuki Mano, Differential equation of Okubo type and flat structure, Various Aspects of Algebraic Geometry, 2015 年 12 月 12 日～2015 年 12 月 13 日, 国際基督教大学(東京都三鷹市)

⑦ 眞野智行、大久保型微分方程式の多変数化と平坦構造、日本数学会秋季総合分科会・函数方程式論分科会特別講演、2015 年 9 月 13 日～2015 年 9 月 16 日、京都産業大学(京都府京都市)

⑧ Toshiyuki Mano, Continued fractions, Pade approximations and Painleve equations I,II, Workshop on Painleve Equations, 2015 年 9 月 2 日～2015 年 9 月 4 日, 台北(台湾)

⑨ Toshiyuki Mano, Flat structure on the space of isomonodromic deformations, TIMS-OCAMI-WASEDA International workshop on Painleve equations and related topics, 2015 年 5 月 10 日～2015 年 5 月 13 日, 台北(台湾)

⑩ 加藤満生、眞野智行、関口次郎、Flat structure on the space of isomonodromic deformations、日本数学会 2015 年度年会、2015 年 3 月 21 日～2015 年 3 月 24 日、明治大学(東京都千代田区)

⑪ 眞野智行、Flat structure on the space of isomonodromic deformations、アクセサリー・パラメーター研究会、2015 年 3 月 13 日 2015 年 3 月 15 日、熊本大学(熊本県熊本市)

⑫ 加藤満生、眞野智行、関口次郎、Flat structure on the space of isomonodromic deformations、The 10th Kagoshima Algenra-Analysis-Geometry Seminar、2015 年 2 月 16 日～2015 年 2 月 19 日、鹿児島大学(鹿児島県鹿児島市)

⑬ 加藤満生、眞野智行、関口次郎、Flat structure on the space of isomonodromic deformations、超幾何方程式研究会 2015、2015 年 1 月 5 日～2015 年 1 月 7 日、神戸大学(兵庫県神戸市)

⑭ 加藤満生、眞野智行、大久保型微分方程式の多変数化への試み、アクセサリー・パラメーター研究会、2014 年 3 月 8 日～2014 年 3 月 10 日、熊本大学(熊本県熊本市)

⑮ 眞野智行、有理関数近似の双対性と Schlesinger 変換の構成について、有理函数近似が繋ぐ可積分系・直交多項式・パンルヴェ方程式、2014 年 1 月 31 日～2014 年 2 月 2 日、一橋大学(東京都国立市)

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等　なし

６．研究組織
(1)研究代表者
眞野　智行（MANO, Toshiyuki）
琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：60378594

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者

(　　　)