様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　6 月　3 日現在

機関番号：32665

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800084

研究課題名（和文）境界条件付平均曲率流の解の境界挙動と非線形退化放物型方程式

研究課題名（英文）Boundary behavior of solutions of the mean curvature flow with boundary conditions and nonlinear degenerate parabolic equations

研究代表者

水野　将司（Mizuno, Masashi）

日本大学・理工学部・准教授

研究者番号：80609545

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：凸領域上のNeumann境界条件付きAllen-Cahn方程式の特異極限問題を考察し，エネルギー測度が直交境界条件付き平均曲率流の測度論的弱解に収束することを示した．とりわけ，直交境界条件を幾何学的測度論において定式化し，反射熱核を用いた境界単調性公式を導出することで，エネルギー測度の境界挙動を解析した．次に背景流と直交境界条件付き平均曲率流のグラフ解を考察し，先験的境界勾配評価を導出した．そして，背景流についてスケール変換から導かれる自然な仮定のもとで，グラフ解の時間局所存在を示した．

研究成果の概要（英文）：We study the singular limit problem for the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions and prove that associated energy measure converges to a measure theoretic solution of the mean curvature flow with right-angle boundary conditions. In particular, we establish the right-angle boundary condition in geometric measure theory and prove the boundary monotonicity formula for the energy measure.

Next, we study the mean curvature flow of graphs both with Neumann boundary conditions and transport terms. We derive a priori boundary gradient estimate for solutions and then show time local existence of solutions of the mean curvature flow under the natural assumption from the point of scaling arguments for the transport terms.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：境界挙動　平均曲率流方程式　幾何学的測度論　特異極限問題

１．研究開始当初の背景

滑らかな境界を持つ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して，時間変数 $t>0$ でパラメトライズされた曲面 $\Gamma_t \subset \Omega$ が古典的な平均曲率流をみたすとは

$$V = H \text{ on } \Gamma_t,\ t>0$$

をみたすことをいう．ここで，V は Γ_t の速度ベクトル，H は平均曲率ベクトルである．平均曲率流は数学的には，Γ_t の面積汎関数に対する勾配流であり，工学的には，結晶成長や 2 相界面のモデル方程式である．境界条件としては，直交境界条件や動的境界条件などが考察されていた．平均曲率流の解の境界の挙動は，数学的には $\mathbb{R}^n$ 内の余次元 2 の部分多様体になると考えられ，工学的には観測可能な情報と考えられることから，理論，応用の両面で興味ある研究対象である．しかし，本問題は**曲面を扱うがゆえの困難さ**と**境界を扱うがゆえの困難さ**が相まって，世界的に研究があまり発展していなかった．

申請者はこれまで非線形退化放物型方程式，とりわけ**発展 p-Laplace 方程式や多孔質媒質方程式の解の正則性を Hölder 連続性の観点から解析した**．この結果を利用して，退化放物型-楕円型 Keller-Segel 系の解の時刻無限大における漸近挙動，特に拡散と集中がつりあうときの一様漸近評価を小川卓克教授との共同研究により導出した．また，Bence-Merriman-Osher によって提唱された平均曲率流の解の数値計算法を研究し，彼らのアルゴリズムに由来する**ある臨界的非線形放物型方程式の解の Harnack 評価を導出し，特異極限パラメータとの依存性を明らかにした**．なお，この非線形放物型方程式は，平均曲率流の等高面方程式の近似であり，非線形退化放物型方程式に関係が深いことに注意しておく．

これらの非線形退化放物型方程式において，方程式が退化するとき，その拡散が消える方向は 1 方向か全方向，すなわち退化する次元は 1 次元か領域と同じ次元である．しかし，**2 方向のみに拡散が消える非線形退化放物型方程式は，典型となるモデルも含めて，何も知られていないと思われた**．そして，2 方向のみに拡散が消えるということは，Euclid 空間内の余次元 2 の曲面の発展方程式を考えることに相当する．すなわち，**Euclid 空間内の余次元 2 の曲面を解析することと，2 方向のみに拡散が消える非線形退化放物型方程式の解析は同等といえる**．そこで，余次元 2 の曲面を解析することで，非線形退化放物型方程式の新たな典型例が得られるのではないかと考えた．

しかし，余次元 2 の曲面は，その自由度の大きさから何らかの付帯条件を与えて解析することが妥当であると思われた．そこで，平均曲率流を境界に制限することで，余次元 2 の動曲面が得られるのではないかと考えた．実際に，3 次元有界領域における，直交条件付平均曲率流の古典解は境界で 1 次元の曲線とみなせるが，この曲線がどのような特徴を持つかは殆んどわかっていなかった．この**境界に制限された曲線の特徴付け，例えばどのような発展方程式をみたすかなどに興味があった**．

この方面の研究において，利根川吉廣教授と共同で，**有界領域における Neumann 境界条件下における Allen-Cahn 方程式に対する境界単調性公式を導出した**．この結果を用いて，平均曲率流の弱解の先験的正則性を導出中であり，弱解の存在も含めて，ある程度の見込がたっていた．他方，Chun Liu 教授との討論において，動的境界条件下における平均曲率流と流体力学に関する示唆をうけ，**動的境界条件下の Allen-Cahn 方程式の解の存在や境界単調性公式を研究中であった**．

２．研究の目的

本研究の目的は，境界条件付平均曲率流，とりわけ直交境界条件や動的境界条件を与えた平均曲率流の弱解の境界挙動を，Allen-Cahn 方程式の特異極限問題から解析することである．特に，外力のついた直交境界条件付平均曲率流の解の存在とその境界の性質，動的境界条件付平均曲率流の解の定式化と存在を幾何学的測度論の立場から明らかにする．

より具体的には，**Neumann 境界条件と外力項のついた Allen-Cahn 方程式から，背景流のついた平均曲率流の弱解の存在を示す**．解の存在を示すには，先験的正則性，とりわけ境界単調性公式の導出が鍵となる.次に，**動的境界条件下における Allen-Cahn 方程式の解の定式化と存在を明らかにする**．動的境界条件は，その境界条件の複雑さもあいまって，解の定式化でさえ明らかではない．Dirichlet-Neumann 写像を生成作用素とする半群法や部分積分を用いた定式化をもとにして，動的境界条件をどのように数学的に扱えばよいかを明らかにする．そして，平均曲率流の解の境界を非線形退化放物型方程式で特徴付けし，得られた偏微分方程式の解の性質を解析的，幾何的の両面の手法を用いて明らかにするとともに，平均曲率流の解の境界挙動を解析する．

これらから,**平均曲率流の弱解の境界の特徴付けと，動的境界条件下における平均曲率流の弱解の存在**の二つの新たな問題が生まれる．Neumann 境界条件は，動的境界条件の緩和極限としてとらえられるので，Neumann 境界条件での解析手法を構築して，他の境界条件での解析の足がかりとする．

３．研究の方法

平均曲率流の挙動を Allen-Cahn 方程式を用いて解析するうえで，単調性公式は重要な役割を果たす．そこで，Neumann 境界条件

における Allen-Cahn 方程式に対する境界単調性公式を導出し，直交境界条件下における平均曲率流の弱解の存在や解の境界における挙動を明らかにする．これらの遂行のためには，内部での存在証明の議論を境界においていかに行うかが鍵となる．本研究と関係の深い研究者と研究打ち合わせ，議論討論を行い，彼らの手法を理解し，境界における先験的正則性を導出し，弱解の存在性を考察する．そして，本研究に関係の深い非線形偏微分方程式論や非線形ポテンシャル論，幾何学的測度論に関する長期間(4 ヶ月)の研究会に参加し，本研究の進展状況や展望について世界の第一線で活躍する研究者と議論討論することで，多くの知見，とりわけ新たな解析手法や問題点，視点や最新の研究動向を得る．

次に，動的境界条件における Allen-Cahn 方程式に対する適切な弱解の定式化を行い，特異極限問題を考えて，動的境界条件下における平均曲率流の弱解の定式化と存在を考察する．動的境界条件を数学的に扱うためには,解をどのように定式化し，存在を示すかが問題になる．解の定式化には，Dirichlet-Neumann 写像を生成作用素とした半群を用いる方法や，部分積分と跡作用素を用いる方法など様々な手法が考えられる．Dirichlet-Neumann 写像は，偏微分方程式の逆問題の解析手法として基本的なため，逆問題の研究者によって深く研究されている．他方，境界と跡作用素との関係については，境界をどのように解析するかという問題として，実解析やポテンシャル論の立場から研究されている．そこで，これらの研究を理解するために重要となる文献，資料を購入し，基本的な知識を理解する．そして研究集会に参加してより発展的な知見を得ることで，本研究に応用する．

他方，動的境界条件とは別に，**得られる弱解の正則性の問題**がある．平均曲率流の弱解は Radon 測度であり，古典解である多様体や曲面とはギャップがある．特に修正可能性やグラフで表示可能かどうかは，このギャップを埋める重要な問題である．そこで, Allen-Cahn 方程式の境界単調性公式を用いて，平均曲率流の弱解の境界でのより詳細な先験的正則性を導出する．これらは，境界の特徴付けを行うためにも重要なステップである．なお，これらの正則性理論は定常状態である極小曲面においては Allard の正則性理論の帰結としてよく知られており，非定常状態である平均曲率流の弱解の内部正則性は Brakke や Kasai-Tonegawa によって示された. Kasai-Tonegawa の手法では単調性公式が重要な役割を果たすことから，境界単調性公式を用いて Allard の正則性理論を境界まで拡張することが自然であると考えられる．そのため，利根川教授と引き続き討論や研究打ち合わせを行い，Kasai-Tonegawa の解析手法の理解とその境界への拡張を試みる．

これらの研究の発展として，**直交境界条件付平均曲率流の弱解の境界挙動を，非線形退化放物型方程式を用いて特徴付けを行う**．そのために，弱解の境界への制限を考えたときに，自然に得られるであろう境界測度を定式化する．これは，余次元 2 の曲面の一般化であり，この測度を解析することで平均曲率流の境界の特徴付けが可能になる．この定式化には，Allard の境界正則性理論の手法とポテンシャル論による境界の解析手法が重要な示唆を与えるであろうと考えられる．実際, Allard は Daniell 積分を用いて,境界測度の類似物を定義し，ヴァリフォールドの境界正則性を導出した．他方，ポテンシャル論により，調和関数の性質を用いた境界測度の導出と境界の解析が行われている．そこで，これらの解析手法を研究して，平均曲率流の弱解の境界挙動を解析する．

さらに，**動的境界条件下での Allen-Cahn 方程式の特異極限問題の解析**を行う．Allen-Cahn 方程式の弱解に対して，特異極限問題を考え，動的境界条件下での平均曲率流の弱解を定式化する．このためには，内部問題に対する特異極限が境界までこめて成立するか，とりわけ境界単調性公式などの先験的境界正則性が導出できるかが重要である．さらに，特異極限によって得られる弱解である Radon 測度の境界が，実際に動的境界条件としての意味を持つかの考察も必要である．これらのことを踏まえて，動的境界条件付平均曲率流の弱解の定式化と Allen-Cahn 方程式の特異極限問題を用いた弱解の存在を議論する

４．研究成果

利根川吉廣教授と共同で，凸領域における Neumann 境界条件付き Allen-Cahn 方程式の特異極限問題を考察した．エネルギー測度に対する Huisken 型境界単調性公式を用いて，エネルギー測度の時間平均が特異極限において領域の境界まで込めて，Dirichlet エネルギーとポテンシャルエネルギーに等分配されることを示した．この事実により，エネルギー測度の第一変分が境界において絶対連続性であることを示すことができ，幾何学的測度論における一般化された平均曲率を境界において定義することができた．これらの帰結として, Brakke によって導入された，幾何学的測度論における平均曲率流の弱解の境界条件を定義することと，定義した弱解の存在と境界における正則性，とりわけ修正可能性を示すことができた．

次に高棹圭介氏と共同で，直交境界条件と移流項の付いた平均曲率流のグラフ解を考察した．グラフがみたす非線形偏微分方程式を考え，グラフ解の境界勾配評価と移流項の正則性の関係を明らかにした．移流

項の滑らかさを仮定せずに勾配評価を導出するためには，体積要素に対する単調性公式を導出することが本質である．我々は凸領域におけるグラフ解の体積要素に対する境界単調性公式を導出した．その帰結として，スケール変換において自然な移流項の正則性条件のもとで，グラフ解の境界勾配評価を得た．なお，移流項の正則性条件は可積分性のみで与えられることから，我々の結果は最大値原理や比較原理では導出できないこと，高棹によって導出された内部勾配評価の仮定を緩和していることに注意しておく．さらに，境界勾配評価と Schauder 評価をくみあわせることにより，グラフ解の時間局所存在評価を得た．

本研究により，直交境界条件のついた平均曲率流の幾何学的測度論における定式化や正則性，可解性が明らかになった．本研究で得られた定式化や解析手法は，接触角一定条件や動的境界条件のついた極小曲面，平均曲率流の解析に影響を与えている．他方，我々の定式化した直交境界条件が，他の方法，とりわけ等高面法によって定式化された直交境界条件とどのような関係にあるかは明らかではなかったことから，当初の計画を変更して，定式化の関係性の解析を行った．本問題は，平均曲率の可積分性が本質的であるが，境界条件を課すと可積分性が導出できなかったために，定式化の関係性を明らかにすることはできなかった．我々の定式化の妥当性を考えるうえで，今後取り組むべき重要な問題であることがわかった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

1. Masashi Mizuno and Yoshihiro Tonegawa, *Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **47**(2015), 1906—1932.

〔学会発表〕（計１１件）

1. 水野 将司，高棹 圭介,「Neumann 境界条件における移流項付き平均曲率流の勾配評価について」，日本数学会 2015 年度 秋季総合分科会 函数方程式論分科会，京都産業大学（京都府・京都），2015 年 9 月 14 日.
2. Masashi Mizuno, *Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions*, Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation - International Conference in honor of Professor Yoshikazu Giga on his 60th birthday -, Sapporo Convention Center (北海道・札幌), 2015 年 8 月 16 日から 18 日.
3. 水野 将司，「Neumann 境界条件付 Allen-Cahn 方程式の特異極限と平均曲率流」，東京理科大学 神楽坂解析セミナー，東京理科大学（東京都・新宿区），2015 年 5 月 23 日.
4. 水野 将司，利根川 吉廣，「Neumann 境界条件付 Allen-Cahn 方程式の特異極限問題」，日本数学会 2014 年度 秋季総合分科会 函数方程式論分科会，広島大学（広島県・東広島），2014 年 9 月 28 日.
5. 水野 将司，「The singular limit of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions」，偏微分方程式セミナー，北海道大学（北海道・札幌），2014 年 6 月 30 日.
6. 水野 将司，「Neumann 境界条件付 Allen-Cahn 方程式の特異極限について」，広島数理解析セミナー，広島大学東広島キャンパス（広島県・東広島），2014 年 6 月 20 日.
7. 水野 将司，「Allen-Cahn 方程式の特異極限の境界挙動とエネルギーの第一変分」，松山解析セミナー2014，愛媛大学（愛媛県・松山），2014 年 2 月 7 日.
8. Masashi Mizuno, *Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions on convex domains*, One-day workshop on geometric variational problems,

Hokkaido University (北海道・札幌), 2013 年 11 月 30 日.

9. Masashi Mizuno, *Boundary behavior of the singular limit of the Allen-Cahn equation on convex domains*, Workshop on nonlinear partial differential equations -- Japan-China joint project for young mathematicians 2013, Ryukoku University (京都府・京都), 2013 年 10 月 26 日.
10. Masashi Mizuno, *Boundary monotonicity formula for the evolutional Allen-Cahn equation with Neumann boundary condition*, Variational Methods for Evolving Objects , Hokkaido University (北海道・札幌), 2013 年 7 月 30 日から 8 月 2 日.
11. Masashi Mizuno, *Weak mean curvature flow and boundary monotonicity formula for the Allen-Cahn equation*, Harmonic analysis and PDEs on manifolds, Chuo University (東京都・文京区), 2013 年 4 月 20 日.

〔図書〕（計　０件）

なし

〔産業財産権〕

なし

〔その他〕
ホームページ等
www.math.cst.nihon-u.ac.jp/~mizuno

６．研究組織

(1)研究代表者
水野　将司　（MIZUNO, Masashi）
日本大学・理工学部・准教授
研究者番号：80609545

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし