

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 16 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800087

研究課題名(和文)変分法を用いた液滴や泡の運動モデルに対する数理解析

研究課題名(英文)A variational approach to the modeling and analysis of droplet and bubble motions

研究代表者

Ginder Elliott (Ginder, Elliott)

北海道大学・電子科学研究所・助教

研究者番号：30648217

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は液滴やシャボン玉のモデル方程式の解析とシミュレーションを行った。ここでの方程式は離散勾配流法と呼ばれている変分的な手法を用いた上で、エネルギーの視点から解析を進めた。また変分法を使うことにより液滴の接触角度における運動をもモデル方程式に導入することができ、これを用いる事により液滴の合併と分裂のシミュレーションのための数値解法を作成した。さらに、今まで知られていなかった双曲型Threshold dynamicsの計算アルゴリズムを開発し、その数学的な根拠を明らかにすることに成功した。尚、本研究課題の実績が認められ日本数学会の2013年度応用数学研究奨励賞を受賞するに至った。

研究成果の概要(英文)：This research analyzed and simulated a mathematical model which describes the motion of droplets and bubbles. We used a variational method known as minimizing movements to treat our equation from the point of view of energy. Droplet contact angle dynamics were also incorporated by using techniques from the calculus of variations, and we built numerical methods for simulating the droplet motions (including coalesce and division). We also discovered a threshold dynamical algorithm for approximating interface motion by hyperbolic mean curvature flow. This research was awarded the Mathematical Society of Japan's 2013 Prize for Excellent Young Applied Mathematicians.

研究分野：Applied Mathematics

キーワード：droplet motion threshold dynamics free boundary problems variational methods numerical algorithm

### 1. 研究開始当初の背景

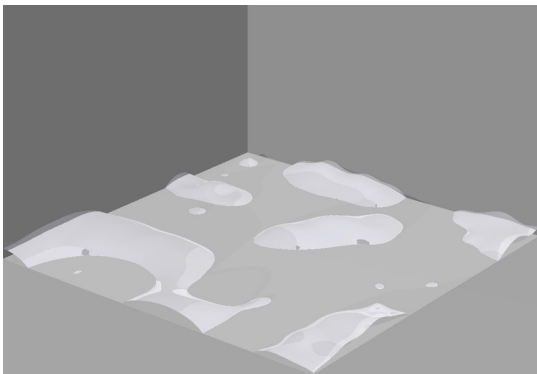
From cavitation, to the motion of DNA strands and soap bubbles, oscillating interfaces are a recurrent theme in nature and play an important role in applications. The related mathematical structures of this research are positioned on the frontier of developments in the theory of partial differential equations and we have focused on analyzing evolutionary equations related to the motion of liquid droplets, soap bubbles, and crystal growth.

### 2. 研究の目的

This research aimed to constructing and analyzing a mathematical model for expressing droplet and bubble motions. We also set a goal at developing numerical methods that correspond to a variation method, known as minimizing movements, which could then provide a comprehensive system for performing numeric and analytic investigations. We also set a goal to develop a threshold dynamic algorithm for modeling oscillatory interfacial motions.

### 3. 研究の方法

The target phenomena are modeled by hyperbolic free boundary problems and, due to their nonlinear nature, particular emphasis was on constructing techniques for understanding their properties, via approximation techniques from the calculus of variations. This research also involved realizing our approximation schemes as general numerical methods, for use in performing large-scale simulations.

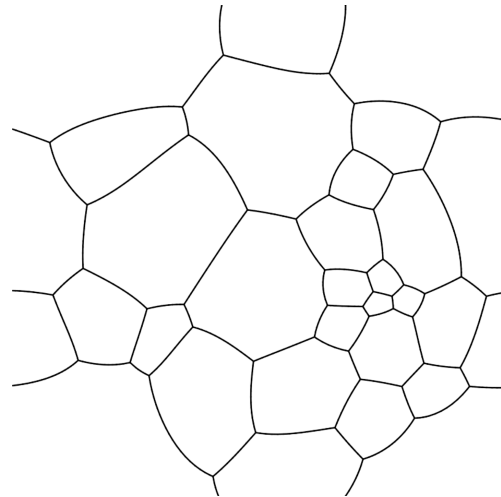


**Figure 1: Droplet Simulation**

### 4. 研究成果

We developed an analytic framework for approximating solutions to a model equation whose evolutions express motions related to droplets and bubbles. Our approach successfully utilized the method of minimizing movements (MM) to treat the phenomena using energy theoretic techniques. By examining free boundary conditions, we incorporated droplet

contact angle dynamics into the variational formulation of our problems and developed methods for investigating numerical properties. Using our methods we simulated droplet dynamics (including their coalesce and divisions). We also discovered and analyzed a threshold dynamical algorithm for approximating motion by hyperbolic mean curvature flow and derived method's order of convergence. Moreover, through the combination of mathematical and computational analysis, we have clarified essential properties of our equations' variational structures. This was achieved by establishing the framework for employing MMs and has enabled us to advance both the simulations and the mathematical analysis. In particular, we were able to reach a major goal of this research, which was to permit that the analysis of the model equation to be performed in the setting of MMs, both mathematically and computationally.



**Figure 2: Grain boundary growth simulation**

This research received the Mathematical Society of Japan's Prize for Excellent Young Applied Mathematicians.

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

1. E. Ginder, A. Katayama, K. Svadlenka. "On an approximation method for hyperbolic mean curvature flow." (査読なし)

RIMS Kokyuroku, (2016).

2. E. Ginder, K. Svadlenka. "Wave-type threshold dynamics and the hyperbolic mean curvature flow." (査読あり)

J. Journal of Industrial and Applied Mathematics (accepted) (2016).

3. E. Ginder, K. Svadlenka. 「変分法による界面運動のシミュレーション」 (査読なし)  
Invited article for 「計算工学」 20 No. 3 (2015), 17-20. (in Japanese)

4. E. Ginder, K. Svadlenka. "On an approximation scheme for oscillatory interfacial motions." (査読なし)

Proceedings of the 40th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, (2015), 90-96.

5. E. Ginder, S. Omata, K. Svadlenka. "A variational method for multiphase volume-preserving interface motions." (査読あり)

Journal of Computational and Applied Mathematics, 257 (2014), 157-179.

6. E. Ginder, K. Svadlenka. "On an algorithm for curvature-dependent interfacial acceleration." (査読なし)

JSCES, 19, (2014).

[学会発表] (計 22 件)

1) E. Ginder: On an approximation method for hyperbolic mean curvature flow. RIMS 研究集会：現象解明に向けた数値解析の新発展 (京都大学・京都府京都市) 2015 年 11 月 20 日

2) E. Ginder: On an approximation scheme for oscillatory interfacial motions. The 40th Sapporo Symposium on PDE (北海道大学・北海道札幌市) 2015 年 8 月 20 日

3) E. Ginder: On the use of minimizing movements in applications. 数学と現象 in 伊豆大島 (大島町役場・東京都大島町) 2015 年 7 月 30 日

4) E. Ginder: A minimizing movement approach to constrained distributed parameter systems. Hokkaido University PDE Seminar (北海道大学・北海道札幌市) 2015 年 4 月 20 日

5) E. Ginder: A thresholding algorithm generating motion by hyperbolic mean curvature flow, The 14th Ries-Hokudai International Symposium (ガトーキングダム・北海道札幌市) 2015 年 2 月 12 日

6) E. Ginder: Threshold dynamical algorithms for curvature dependent interfacial motions. 2015 A3 joint Workshop on Fluid Dynamics and Material

Science (Beijing, China) 2015 年 2 月 12 日

7) E. Ginder: A thresholding algorithm for hyperbolic mean curvature flow. 反応拡散現象にみられる境界層とその周辺の数理 (明治大学・東京都中野区) 2014 年 11 月 28 日

8) E. Ginder: A thresholding procedure generating curvature-driven interfacial acceleration. 第 3 回岐阜数理科学研究会 (岐阜高山まち博物館・岐阜県高山市) 2014 年 9 月 9 日

9) E. Ginder: Threshold dynamics generating curvature dependent interfacial acceleration. The 10th AIMS conference on dynamical systems, differential equations, and applications (Madrid, Spain) 2014 年 7 月 8 日

10) E. Ginder: On an algorithm for curvature dependent interfacial acceleration. 第 19 回計算工学講演会 (平和記念資料館・広島県広島市) 2014 年 6 月 13 日

11) E. Ginder: A variational method for acceleration dependent interfacial motions. The 40th applied mathematics forum (東北大学・宮城県仙台市) 2014 年 5 月 21 日

12) E. Ginder: The hyperbolic BMO algorithm. 日本数学会 2014 年度年会. (学習院大学・東京都豊島区) 2014 年 3 月 18 日

13) E. Ginder: A numerical method for curvature dependent acceleration, 北陸応用数理研究会 2014 (金沢大学サテライトプラザ・石川県金沢市) 2014 年 2 月 14 日

14) E. Ginder: On the hyperbolic BMO algorithm, Kunitachi One-Day Symposium (一橋大学・東京都国立市) 2014 年 2 月 5 日

15) E. Ginder: Droplets and Bubbles: the Free Boundary and Interfacial Dynamics, The 17th Sanken International Symposium (大阪大学・大阪府吹田区) 2014 年 1 月 12 日

16) E. Ginder: Droplets and bubbles: a hyperbolic free boundary problem approach, 2013 年度応用数学合同研究集会 (龍谷大

学・滋賀県大津市) 2013 年 12 月 21 日

17) E. Ginder: Droplets and Bubbles: the Free Boundary and Interfacial Dynamics, Kyoto University Applied Mathematics Seminar (京都大学・京都府京都市) 2013 年 10 月 15 日

18) E. Ginder: A variational approach to droplet motion. The 9th East Asia Siam Conference (Bandung Newton Hotel, Indonesia). 2013 年 6 月 19 日

19) E. Ginder: A variational approach to volume constrained membrane motions. Institute for Mathematics and its Applications (Minneapolis, USA) 2013 年 6 月 5 日

20) E. Ginder: Droplets and bubbles: a variational approach. (University of Glasgow, UK) 2013 年 5 月 30 日

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

<http://mmc01.es.hokudai.ac.jp/~eginder/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

Ginder Elliott (GINDER, Elliott)  
北海道大学・電子科学研究所・助教  
研究者番号：30648217

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：