様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８０００８９

研究課題名（和文）無限ラムゼイ理論と実数の組合せ論

研究課題名（英文）Infinite Ramsey theory and combinatorics on the reals

研究代表者
依岡　輝幸（Yorioka, Teruyuki）

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：６０４３２１９２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：ラムゼイ理論的性質や公理についてはまだ未解決なことが多く残されている．例えば，代表的な強制法の性質である可算鎖条件はラムゼイ理論的な性質のひとつであり，「S-space が存在しない」，「entangled set of reals が存在しない」，P-ideal Dichotomy などはラムゼイ理論的な数学的命題だと考えられる．本研究では，(1) 可算鎖条件を満たす強制法に関するPrikry の問題についての研究，(2) ideal-based 強制法についての性質，(3) 特殊でない Aronszajn 木が存在することと無矛盾な様々なラムゼイ理論的数学的命題，について研究した．

研究成果の概要（英文）：There are several open problems on Ramsey theoretic properties and assertions. For example, the countable chain condition is a representative of Ramsey theoretic properties on the forcing theory, and the following assertions can be considered as Ramsey theoretic assertions: There are no S-spaces, there are no entangled sets of reals, and the P-ideal Dichotomy. In the project, it is studied that (1) Prikry's problem on ccc forcings, (2) new properties of ideal-based forcings, and (3) the consistency about the existence of a non-special Aronszajn tree with a couple of Ramsey theoretic assertions.

研究分野：公理的集合論

キーワード：公理的集合論　強制法理論

## 1．研究開始当初の背景

「6 人集まれば，知り合い同士の 3 人組もしくは互いに知り合いでない 3 人組が存在する」というのが最も単純なラムゼイの定理である．ラムゼイ理論は初等整数論や，位相空間論，バナッハ空間の幾何学など様々な数学の分野の発展に寄与している．無限集合上のラムゼイ理論的な数学的命題の多くは集合論の公理系と無矛盾であり，また多くの未解決問題が残されている．

(1) ルベーグ可測集合全体は完備ブール代数をなす．von Neumann は「どんな完備ブール代数は可算加法的測度を持つか」という問題を提唱している．もっと具体的に，von Neumann は可算加法的測度を持つブール代数が可算鎖条件（countable chain condition, ccc）と弱分配則（weak distributive law, 強制法理論での $\omega^\omega$-bounding と同値な条件）を持つことを指摘し，このふたつで十分か，つまり「可算鎖条件と弱分配則を持つ完備ブール代数は測度を持つか」(Scottish Problem 163, von Neumann の測度問題, 1937 年)」という問題を提唱している．Maharam はこの問題のブール代数の条件に着目し，連続部分測度（continuous submeasure）という概念を導入した．連続部分測度は測度を弱めた条件として定義され，連続部分測度を持つ完備ブール代数も可算鎖条件と弱分配則を満たす．Maharam は von Neumann の測度問題を「連続部分測度を持つ完備ブール代数は測度を持つか (Maharam の問題 1, 1942 年)」と「どんな可算鎖条件と弱分配則を満たす完備ブール代数も連続部分測度を持つことは無矛盾か (Maharam の問題 2, 1942 年)」のふたつに分けた[*1]．Horn と Tarski は von Neumann の問題において可算鎖条件に着目して研究し，$\sigma$-有界鎖条件 ($\sigma$-bounded chain condition) と $\sigma$-有限鎖条件 ($\sigma$-finite chain condition) を導入した．$\sigma$-有界鎖条件は $\sigma$-有限鎖条件よりも強い性質であり，測度を持つ完備ブール代数は $\sigma$-有界鎖条件を満たし，連続部分測度を持つ完備ブール代数は $\sigma$-有限鎖条件を持つ．Horn と Tarski は「$\sigma$-有限鎖条件を持つ完備ブール代数は $\sigma$-有界鎖条件を持つか」という問題 (Horn-Tarski の問題，1948 年) を提唱している．以上をダイアグラムで示すと以下のようになる．

$$\begin{tikzcd}
\text{測度を持つ} \arrow[r] \arrow[d] & \text{連続部分測度を持つ} \arrow[d] \\
\sigma\text{-有界鎖条件を持つ} \arrow[r] & \sigma\text{-有限鎖条件を持つ}
\end{tikzcd}$$

Maharam の問題 1 は「上記ダイアグラムの上部の逆向き矢印が成り立つか」という問題で，Horn-Tarski の問題は「上記ダイアグラムの下部の逆向き矢印が成り立つか」という問題である．

Balcar-Jech-Pazăk は，Todorčević が導入した $P$-ideal Dichotomy の応用として，「$P$-ideal Dichotomy が成り立てば，可算鎖条件と弱分配則を満たすどんな完備ブール代数も連続部分測度を持つ」ことを示し，Maharam の問題 2 を肯定的に答えた（2005 年）．Talagrand は連続部分測度を持ち，測度を持たない完備ブール代数を構成することで Maharam の問題 1 を否定的に解決し，Thümmel は $\sigma$-有界鎖条件を持たない $\sigma$-有限鎖条件を持つ完備ブール代数を構成することで Horn-Tarski の問題を否定的に解決した．

(2) 「$S$-space は存在するか」という位相空間論の問題を解決するため，Todorčević は side condition method という手法を編み出し，「$S$-space が存在しないことは無矛盾である」ことを証明した．side condition method はサイズ $\aleph_1$ の集合を付加する（可算鎖条件を満たさない）proper 強制法を定義するための非常に強力かつ広範な手法であり，現在まで様々な応用例が知られており，side condition method を用いていくつもの問題が解決されている．例えば，Zapletal は，$S$-space に不可算離散集合を付加する side condition method による強制法を含む side condition method のクラス “ideal-based forcings” を導入した．ideal-based forcings は ideal-based triple に不可算フィルターを付加する強制法で，「$S$-space が存在しない」ことのようなラムゼイ理論的数学的命題の無矛盾性を導くことができる．Zapletal は ideal-based forcing による強制拡大においてもルベーグ測度ゼロ集合の加法性 $\mathrm{add}(\mathcal{N})$ は小さいままに保存される，つまり $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ が成り立ったままである，ことを示すことで，「$S$-space が存在しないことと，ルベーグ測度ゼロ集合の加法性 $\mathrm{add}(\mathcal{N})$ が小さい，つまり $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ が成り立つことは無矛盾である」ことを証明している．

(3) 実数直線の特徴づけに関する問題「可算鎖条件を満たす全順序は可分か」という Suslin の問題に端を発し，Aronszajn は Aronszajn 線（$\omega_1$ と $-\omega_1$ と不可算可分全順序と同型な部分順序を持たない不可算全順序）を導入し，Kurepa は

[*1] Suslin 代数は可算鎖条件と弱分配則を持ち，測度を持たない完備ブール代数であるため，Suslin 代数の存在は Maharam の問題 2 の反例になる．Maharam の問題提起は 1942 年であり，当時は Suslin 代数の存在の独立性はまだ知られていなかったため，上記の Maharam の問題 2 は現代的な解釈であり，Maharam の元々の問題意識とは少し異なるかもしれない．

Aronszajn 線に対応する組合せ論的構造物である Aronszajn 木を導入した．可算鎖条件を満たす Aronszajn 木の存在は Suslin の問題を否定的に解決する．Solovay と Tennenbaum は「可算鎖条件を満たす Aronszajn 木は存在しないことは無矛盾である」ことを証明し，Martin と Solovay は Martin の公理 $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ を導入し，「$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ が成り立てば，どの Aronszajn 木も可算鎖条件を満たさない」ことを示した．Baumgartner は Martin と Solovay の証明を精査し，「$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ が成り立てば，どの Aronszajn 木も有理数順序集合 $\mathbb{Q}$ への順序埋め込みができる」ことを示した．$\mathbb{Q}$ へ順序埋め込みができる Aronszajn 木を特殊 Aronszajn 木（special Aronszajn 木）と呼ぶ．特殊 Aroszajn 木は可算鎖条件を満たさないため，Baumgartner の結果は Martin-Solovay の結果よりも強いものであった．これが本当に強い条件なのか，つまり「どの Aronszajn 木も可算鎖条件を満たさないならば，どの Aronszajn 木も特殊であるか」という問題が提起された．Shelah は "特殊でない Aronszajn 木の強制法における保存則" と新しい反復強制法を導入することで，「どの Aronszajn 木も可算鎖条件を満たさないが，特殊でない Aronszajn 木が存在することは無矛盾である」ことを証明した．

## ２．研究の目的

(1) Prikry は「すべての可算鎖条件を満たす強制法は Cohen 実数もしくはランダム実数を付加することが無矛盾であるか」という問題を提唱している（Prikry の問題, 1970 年代）．$\sigma$-centered な強制法はランダム実数を付加しない可算鎖条件を満たす強制法であるが，古典的な結果としては，ランダム実数を付加しない可算鎖条件を満たす強制法はそれ以外に知られていなかった．代表者は以前の研究で，Larson-Todorčević が導入した rectangle refining property もしくは代表者が導入した $\mathsf{R}_{1,\aleph_1}$ （どちらも可算鎖条件より強い条件である）を満たす強制法はランダム実数を付加しないことを証明している（A non-implication between fragments of Martin's Axiom related to a property which comes from Aronszajn trees, Annals of Pure and Applied Logic, 161 (2010), 469–487）．rectangle refining property と $\mathsf{R}_{1,\aleph_1}$ はどちらもラムゼイ理論的な強制法の性質であり，ラムゼイ理論的な性質が証明のキーポイントになっている．Thümmel の構成した完備ブール代数は，それを強制法と見たとき，新しい可算鎖条件を満たす強制法となっている．これがランダム実数を付加するかどうかを調べることが目的である．

(2) ideal-based forcings の持つさらなる性質を見つけ，新しい無矛盾結果を得ることが目的である．ここで特に着目しているのは，ideal-based forcing による強制拡大が pseudo-intersection 数 $\mathfrak{p}$ とルベーグ測度ゼロ集合族の被覆性 $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ が小さいままであることを保存するかどうかである．「$P$-ideal Dichotomy と $\mathfrak{p} = \aleph_1$ が成り立ち，$S$-space が存在しないことは無矛盾であるか」という問題は未解決であり（この問題については基盤研究 (C)『無限集合の組合せ論と強制法理論による公理的集合論の他分野への応用』課題番号 22540124 でも行っている），ideal-based forcing による強制拡大が $\mathfrak{p} = \aleph_1$ を保存することを示すことができれば，この未解決問題が肯定的に解決される．また，例えば「$S$-space が存在しない」など，side condition method を用いることで得られる多くの無矛盾結果では $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ の値が連続体濃度と同じ $\aleph_2$ であることが多かった．もし ideal-based forcing による強制拡大が $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ を保存することが証明できれば，それによって新しい無矛盾結果を導くことができることが見込まれる．強制拡大によって $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ が保存されることから，その強制法がランダム実数を付加しないことが導かれる．よってこの研究は (1) の研究と関連がある．

(3) Todorčevi'c は 1980 年代に $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ をラムゼイ理論的観点で研究し，ラムゼイ理論的な $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ の部分公理群を導入している．それらの一部をダイアグラムで表すと以下のようになる．

$$\mathsf{MA}_{\aleph_1} \to \cdots \to \mathcal{K}_n \to \cdots \to \mathcal{K}_2 \to \mathcal{C}^2$$

例えば「すべての Aronszajn 木は特殊である」ことは $\mathcal{K}_2$ から導かれ，Suslin 仮説（すべての Aronszajn 木は可算鎖条件を満たさない）ことは $\mathcal{C}^2$ から導かれる．上記の $\mathcal{K}_n$ は $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ と同値であるかどうか，$\mathcal{K}_2$ と $\mathcal{C}^2$ は同値であるかどうか，など，Todorčević の部分公理たちの関係は多くの未解決の問題が残されている．「すべての Aronszajn 木は特殊である」ことは $\mathcal{K}_2$ から導かれるが，例えば「特殊でない Aronszajn 木が存在し，$\mathcal{C}^2$ が成り立つことは無矛盾である」ことが示されれば，「$\mathcal{K}_2$ と $\mathcal{C}^2$ が同値でないことが無矛盾である」ことが分かり，未解決問題のひとつが解決される．

また，$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ よりも強い強制公理 Proper Forcing Axiom PFA から導かれる数学的命題と特殊 Aronszajn 木の存在性の研究も行った．具体的には，PFA から導かれるいくつかの数学的命題が「特殊でない Aronszajn 木が存在すること」と無矛盾であることを研究した．これはある proper forcings が特殊でない Aronszajn 木を

特殊でないままに保存しておくという保存則を持つことを示すことによって証明される．よってこの研究は proper forcings の保存則に関する研究であり，これは今後様々な方向で応用されることが想定される．

３．研究の方法

積極的に様々な研究者と研究打ち合わせを行い，成果発表を行った．その実行のために，研究費のほとんどは旅費に費やされた．

４．研究成果

(1) Thümmel の構成した $\sigma$-有界鎖条件を持たない $\sigma$-有限鎖条件を持つ完備ブール代数は Todorčević が 1980 年代に編み出した Borel definable な完備ブール代数を応用して構成されている．この手法で構成された完備ブール代数を Thümmel は Todorčević ordering と呼んだ．代表者はまず Thümmel の完備ブール代数がランダム実数を付加しないことを示した．Thümmel の完備ブール代数は可分位相空間をもとに構成されており，その可分性を使って証明したのだが，可分性を可算鎖条件に置き換えても証明できることに気づき，「可算鎖条件を満たす Todorčević ordering はランダム実数を付加しない」ことを示した．この結果は論文 ① で発表している．

(2) ideal-based forcing がランダム実数を付加しないことを証明した．これにより，例えば「$S$-space が存在せず，$\mathrm{cov}\mathcal{N} = \aleph_1$ が成り立つことは無矛盾である」ことが示される．この結果は論文 ② で発表している．

(1) と (2) の研究に関して，Chodounsky と Zapletal は代表者のアイデアを抽出し，Y-cc と Y-proper という強制法のクラスを導入し，上記の研究をより発展させている [D. Chodounsky and J. Zapletal, W hy Y-c.c. Ann. Pure Appl. Logic 166 (2015), no. 11, 1123–1149.].

(3) 代表者の論文 [T. Yorioka, A non-implication between fragments of Martin's Axiom related to a property which comes from Aronszajn trees. Ann. Pure Appl. Logic 161 (2010), no. 4, 469–487.] で「$\mathcal{K}_2(\mathsf{R}_{1,\aleph_1})$ と特殊でない Aronszajn 木が存在することは無矛盾である」ことが示されている．$\mathcal{K}_2(\mathsf{R}_{1,\aleph_1})$ は $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ の部分公理のひとつであり，$\mathcal{C}^2$ から導かれる数学的命題の多くを導くことができるが，そのすべてではない．例えば，$\mathcal{C}^2$ は「entangled set of reals が存在しない」ことを導くが，$\mathcal{K}_2(\mathsf{R}_{1,\aleph_1})$ はそれを導かないことが知られている．

代表者は entangled set of reals の entangledness を壊し，特殊でない Aronszajn 木を保存する強制法を構成した．このことから，「entangled set of reals が存在せず，$\mathcal{K}_2(\mathsf{R}_{1,\aleph_1})$ が成り立ち，特殊でない Aronszajn 木が存在することは無矛盾である」ことを示した．これは「$\mathcal{C}^2$ が成り立ち，特殊でない Aronszajn 木が存在することは無矛盾である」ことの証明へより近づいたと言える．

さらに，上記の証明のアイデアを応用して，PFA から導かれる代表的なラムゼイ理論的公理である Todorčević の Open Graph Dichotomy OCA と Todorčević の $P$-ideal Dichotomy PID も特殊でない Aronszajn 木が存在することと無矛盾であることを示した．特に後半部分の結果から，「PID からすべての Aronszajn 木は特殊であることが導かれるか」という Todorčević の問題を解決したことになる．これは Hirschorn がプレプリント [J. Hirschorn, Combinatorial and hybrid principles for sigma-directed families of countable sets modulo finite, arXiv:0706.3729.] で証明を発表しているが，代表者の手法は Hirschorn の証明方法とは異なり，別証明になっている．

この研究の一部は ③ で発表している．大部分は The existence of a non-special Aronszajn tree and some consequences of the Proper Forcing Axiom という論文として，現在投稿中である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 3 件）


① Teruyuki Yorioka, Todorcevic orderings as examples of ccc forcings without adding random reals, Comment. Math. Univ. Carolin., 査読有, 56, 1 (2015) 125-132. DOI: 10.147.12/1213-7243.015.111

② Teruyuki Yorioka, Keeping the covering number of the null ideal small, Fund. Math., 査読有, 231 (2015), 139-159. DOI: 10.4064/fm231-2-3

③ Teruyuki Yorioka, The existence of a non special Aronszajn tree and Todorcevic orderings, 数理解析研究所講究録, 査読無, No 1949 (2014), 89-98. `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1949-10.pdf`

〔学会発表〕（計 11 件）

① 依岡　輝幸, Von Neumann の測度問題に関する CCC 強制法の性質, 2016 年日本数学会秋季総合分科会, 2016 年 9 月 17 日, 関西大学（大阪府吹田市）.

② Teruyuki Yorioka, Todorcevic orderings add no random reals, 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2015 年 11 月 27 日, Min Nan Normal University, Zhangzhou, China.

③ Teruyuki Yorioka, Todorcevic's fragments of Martin's Axiom and its restrictions, Independence Results in Mathematics and Challenges in Iterated Forcing (Workshop of Isaac Newton Institute for Mathematical Science), 2015 年 11 月 5 日, University of East Anglia, Norwich, UK.

④ Teruyuki Yorioka, Todorcevic's fragments of Martin's axiom and a recent result due to Bagaria and Shelah, Sets and Computations, 2015 年 4 月 1 日, Institute for Mathematical Science, National University of Singapore, Singapore.

⑤ Teruyuki Yorioka, Some consistency results with the existence of a non special Aronszajn tree, RIMS 研究集会 2015 公理的集合論の最近の進展, 2015 年 9 月 17 日, 京都大学数理解析研究所（京都府京都市）.

⑥ Teruyuki Yorioka, On fragments of Martin's Axiom, RIMS 研究集会 2014 集合論における無限組み合わせ論とその応用, 2014 年 11 月 11 日, 京都大学数理解析研究所（京都府京都市）.

⑦ Teruyuki Yorioka, Side condition method を用いた forcings の新しい保存定理, 2014 年度日本数学会年会, 2014 年 3 月 16 日, 学習院大学（東京都豊島区）.

⑧ Teruyuki Yorioka, Preservation theorems with models as side conditions, Axiomatic approaches to forcing techniques in set theory (13w5026), 2013 年 11 月 8 日, Banff International Research Station, Banff, Canada.

⑨ Teruyuki Yorioka, Asperó-Mota iteration について, 2013 年度日本数学会秋季総合分科会, 2013 年 9 月 27 日, 愛媛大学（愛媛県松山市）.

⑩ Teruyuki Yorioka, Side condition method and random reals, International Conference on Topology and Geometry 2013, 2013 年 9 月 2 日, 島根大学（島根県松江市）.

⑪ 依岡　輝幸, Side condition method and the preservation of a tower in $\mathcal{P}(\omega)$, RIMS 研究集会 反映原理と巨大基数の集合論, 2013 年 9 月 9 日, 京都大学数理解析研究所（京都府京都市）.

〔その他〕

ホームページ

http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~styorio/

6．研究組織

(1) 研究代表者

依岡　輝幸（YORIOKA, TERUYUKI）

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：60432192

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし