

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 12 日現在

機関番号：17401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800093

研究課題名(和文)有限体上の歪アダマール型差集合および円分強正則グラフの存在性の解明

研究課題名(英文)Existence of skew Hadamard difference sets and cyclotomic strongly regular graphs on finite fields

研究代表者

初原 幸二 (MOMIHARA, KOJI)

熊本大学・教育学部・准教授

研究者番号：70613305

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目標は、有限体上の歪アダマール差集合および円分強正則グラフの存在またその関係を明らかにすることであった。先行研究において、歪アダマール差集合の例として、平方剰余差集合でない例がいくつか知られていた。歪アダマール差集合と円分強正則グラフは異なる組合せ構造であるが、散在的な円分強正則グラフの例と歪アダマール差集合の例が存在する体の位数が一致しており、その関係性を明らかにすることが研究の出発点であった。研究成果として円分強正則グラフから歪アダマール差集合が無数個生成できることを証明し、得られた歪アダマール差集合が平方剰余差集合と非同値なものを無限個含んでいることを示した。

研究成果の概要(英文)：The objective of this research project is to make clear the existence of skew Hadamard difference sets and cyclotomic strongly regular graphs and their relationship. In previous research, several examples of skew Hadamard difference sets were found, which are inequivalent to the quadratic residue difference sets. We found a nice connection between these two different combinatorial structures. We found that the orders for which such sporadic skew Hadamard difference sets and cyclotomic strongly regular graphs exist coincide. This is a starting point of our research. Indeed, we showed that infinitely many skew Hadamard difference sets can be obtained from cyclotomic strongly regular graphs. Furthermore, we proved that the family includes infinitely many skew Hadamard difference sets inequivalent to the quadratic residue difference sets.

研究分野：数物系科学

キーワード：組合せデザイン アソシエーションスキーム 強正則グラフ 差集合 平方剰余差集合 歪アダマール差集合 円分強正則グラフ 有限体

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、組合せデザインと関連する組合せ論についての研究を行ってきた。本研究対象の一つであるアダマール行列は、符号理論や統計学に応用を持つ組合せ構造である。アダマール行列の存在性については、組合せ論において重要な未解決な問題の一つである。先行研究において、「差集合」と呼ばれる組合せ構造を利用したアダマール行列の構成法が提案されており、アダマール行列を生成するための手法・理論として発展している。ここで、差集合については、有限群論や有限幾何学の応用的位置付けとして、存在・非存在や構成法に関する研究がなされてきた。

特に、歪アダマール差集合という差集合は skew と呼ばれる特殊なアダマール行列を構成することが知られており、Golay 符号と呼ばれる統計や誤り訂正符号の理論に応用される様々な離散構造を生成できるという事実に基づき、その応用を中心に組合せ数学や情報通信の分野で幅広く研究がなされてきた。歪アダマール差集合の代表的な構成法として、有限体の平方剰余を利用した構成法が知られており、平方剰余差集合(または Paley 差集合)と呼ばれる。また、歪アダマール差集合の存在性に関しては、存在する群は基本可換群でないといけないといった予想や、平方剰余差集合に限るなどといった予想が知られている。2006年、Ding-Yuan によって上記の2つ目の予想の反例が与えられ、歪アダマール差集合の構造論や構成法に関する数多くの論文が出版された。特に、いくつかの散在的な例も与えられている。一方で全く別の組合せ構造であるが、円分強正則グラフと呼ばれる良いグラフに関する研究もある符号の存在性と関連して盛んに研究されており、2003年に Schmidt-White によってその存在性に関する大きな予想が挙げられた。そのプロセスの中で、円分強正則グラフの散在的な例が与えられた。今回の研究のきっかけとなったのは、上記の散在的な円分強正則グラフと歪アダマール差集合が存在している群の位数が一致しているという事実気が付いた点であり、何か関係があるはずであろうという点で、その関係性についても明らかにすることも重要なテーマとして研究を開始した。

2. 研究の目的

研究背景で述べたように、既存の散在的に知られている円分強正則グラフと歪アダマール差集合について、それらが存在して

いる群の位数が一致しており、それらの間に何らかの関係があると予想した。この予想を契機に、下記で与える問題が自然と浮かび、この研究課題の着想に至った。

研究当初に挙げた明らかにしたい事項・目的について述べる。

(1) 散在的な歪アダマール差集合と Schmidt-White の円分強正則グラフの構成法を円分類および指標の言葉で書き直し、存在性がなぜ一致しているのかを明確化する。特に、いくつかの円分強正則グラフは主に指数2型と呼ばれる円分類およびガウス和と呼ばれる指標和の計算を基に構成を行ったが、一般の指数型のガウス和の計算は非常に難しい。よって、ガウス和の具体的な計算をすることなく、どのように存在性が対応するのかを調べる。

(2) (1)をもとに、自明なものを含めた円分強正則グラフと歪アダマール差集合との存在性の対応を明らかにし、新たな歪アダマール差集合を無限個構成する。円分強正則グラフが自明であっても、対応する歪アダマール差集合の存在性は一般に自明でないという点に注意する。

(3) 乗法部分群だけでなく、そのコセットの和集合から得られる一般の強正則ケーリーグラフに対し、(2)の類似が発見できるかを調べる。また、さらに一般化し、ケーリーグラフに限らず、一般の強正則グラフとアダマール行列(歪アダマール差集合を一般化した離散構造)との間に同様の存在性に関する関係があるかを明らかにする。

(4) 歪アダマール差集合の非同値性を示すための不変量として、歪アダマール差集合から得られるアダマール行列や組合せデザインの自己同型群を計算していたが、それは理論的な計算は困難で計算機が必須であった。よって、理論的に「計算可能な」不変量の新しい開発を試みる。これによって、(2)で得た歪アダマール差集合と平方剰余差集合との非同値性の判定を試みる。

これらの4つの問題を解決することを研究目的とした。

3. 研究の方法

研究は、以下の項目について研究を実施した。

(1) 散在的な歪アダマール差集合と Schmidt-White の円分強正則グラフの構成法を円分類の言葉で記述し、それぞれの構成法において鍵となる性質および構造を、計

算機を併用して、明らかにしていくという研究方法を取った。

(2) (1)の研究に基づき、双方の同値性が言えるか？ もしくは片方からもう片方の存在性を証明することができるか？という流れで研究を行った。

(3) 上記の歪アダマール差集合と円分強正則グラフの部分的な同値性について、それを散在的な円分強正則グラフから無限個存在している「自明な」円分強正則グラフに拡張し、非自明な歪アダマール差集合の新たな構成法を与えるという流れで研究を行った。

(4) (3)の手法の更なる一般化を他の強正則グラフやアソシエーションスキーム等の組合せ構造に適用する。特に、未解決となっていた有限幾何学的離散構造の存在性に関する問題への応用を考えた。

(5) これまでの研究で得られた歪アダマール差集合の既存の平方剰余差集合との同値・非同値性の問題について研究を行った。特に、同値性に関する新たな不変量を導入し、それが有効であるかの計算機を併用した例の発見、および、無限個へ適用できるようにするための理論の構築を行った。

4. 研究成果

平成 25 年度から平成 27 年度の 3 年間に以下のような研究成果を得た。

(1) 散在的な歪アダマール差集合と Schmidt-White の円分強正則グラフの構成法を円分類の言葉で記述し、計算を併用して双方の構造を明らかにすることに成功した。また、予想していた通り、円分強正則グラフの持つ存在条件が真に歪アダマール差集合のそれよりも強いことが示せた。これによって、散在的な歪アダマール差集合から新たな歪アダマール差集合を構成できた。また、この結果を自明な円分強正則グラフに拡張し、新たな歪アダマール差集合の構成法を与えることに成功した。この結果は、SIAM Journal on Discrete Mathematics に 単著で論文を投稿し採用された。

(2) (1)で示したように、円分強正則グラフの存在性に関する条件は、非常に強いため、歪アダマール差集合だけでなく、類似した構造に関しても何か存在性を証明できるのではという発想から、他の強正則グラフ・アソシエーションスキーム・Cameron-Liebler

line class \cdot m -ovoid という幾何構造などの存在性の問題に取り組んだ。実際、(1)で得られた手法の応用として、これらの他の組合せ構造の存在性を証明することができ、Combinatorica, Finite Fields and their Applications, Journal of Algebraic Combinatorics, Journal of Combinatorial Theory, Series A へ論文を投稿し、採択された。

(3) 歪アダマール差集合の同値性の不変量として素数を法とする三重交差数という概念を導入し、既存の歪アダマール差集合と平方剰余差集合との非同値性について調べた。特に、2013年にFeng-Xiangが与えた構成法によって生じる歪アダマール差集合の族が平方剰余差集合とは非同値なものを無限個含んでいることを証明することに成功した。証明の方法としては、先に計算機によって小さい例で非同値なものを探し、また、一般論によって、その小さい例の拡大体上へリフトもまた非同値であるということを示すことによる。この結果は、歪アダマール差集合の非同値性の問題が、通常の差集合のそれよりも一般的に困難であり、理論的な結果がほとんど知られていなかったという点に鑑み、新たな手法を提案したという点で価値のある結果であると思われる。この結果は、Electronic Journal of Combinatorics へ単著で投稿し採択された。また、最近私の研究およびChen-Fengによって得られた歪アダマール差集合にも同様の手法によって非同値性を証明することができた。この結果については、現在論文を作成中である。

(4) 円分強正則グラフの一般化として、3値の非自明な固有値(指標値)をとる円分型グラフについて研究を行い、その存在性・デザインとの関係・アソシエーションスキームとの関係について、Zhejiang大学のTao Feng氏、Delaware大学Qing Xiang氏と共同で研究を行った。特に、その存在性について、部分的ではあるがSchmidt-Whiteの予想の類似を得ることができた。この結果は国際雑誌Combinatoricaへ投稿し、採択された。

本研究における研究成果は概ね当初の予定通りの成果を得られたと考えている。特に散在的な歪アダマール差集合とSchmidt-Whiteの円分強正則グラフの関係性を明らかにできたことは、研究当初予想していた通りの結果が得られたという点で、この研究目的は十分達せられたと考えられる。また、歪アダマール差集合の非同値性について、部分的に解決が得られ、これまでほとんどなかった一般論を得られたとい

う点で、他の研究者へのインパクトは大きいものと思われる。また、関連する研究として、アソシエーションスキームや強正則グラフ・その他の幾何学的構造の新たな構成法を提示し、また、円分強正則グラフの拡張概念について研究を行い、その存在性について部分的であるが明らかにできたことは、予想以上の成果であったと言えるだろう。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

Tao Feng, Koji Momihara, Qing Xiang, Three-valued Gauss periods, circulant weighing matrices and association schemes, Journal of Algebraic Combinatorics, 査読有、2016、DOI:

10.1007/s10801-016-0664-z

Tao Feng, Koji Momihara, Qing Xiang, A family of m -ovoids of parabolic quadrics, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 査読有、140巻、2016、97 - 111、DOI:

10.1016/j.jcta.2016.01.002

Koji Momihara, Yu Okumura, New strongly regular decompositions of the complete graphs with prime power vertices, Finite Fields and Their Applications, 査読有、36巻、2015、63 - 80、DOI:

10.1016/j.ffa.2015.07.001

Tao Feng, Koji Momihara, Qing Xiang, Constructions of strongly regular Cayley graphs and skew Hadamard difference sets from cyclotomic classes, Combinatorica, 査読有、35巻、2015、413 - 434、DOI:

10.1007/s00493-014-2895-8

Tao Feng, Koji Momihara, Qing Xiang, Cameron-Liebler line classes with parameter $x = \frac{(q^2-1)}{2}$, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 査読有、133巻、2015、307 - 338、DOI:

10.1016/j.jcta.2015.02.004

Tao Feng, Koji Momihara, Nonsymmetric

primitive translation schemes of prime power order, Journal of Algebraic Combinatorics, 査読有、41巻、2014、1 - 20、DOI: 10.1007/s10801-014-0523-8

Cuiling Fan, Koji Momihara, Unified combinatorial constructions of optimal optical orthogonal codes, Advances in Mathematics of Communications, 査読有、8巻、2014、53 - 66、DOI:10.3934/amc.2014.8.53

Koji Momihara, Mieko Yamada, Divisible difference families from Galois rings $GR(4; n)$ and Hadamard matrices, Designs, Codes and Cryptography, 査読有、73巻、2014、897 - 909、DOI: 10.1007/s10623-013-9833-4

Koji Momihara, Qing Xiang, Lifting constructions of strongly regular Cayley graphs, Finite Fields and Their Applications, 査読有、26巻、2014、86 - 99、DOI:10.1016/j.ffa.2013.11.003

Koji Momihara, Certain strongly regular Cayley graphs on $\mathbb{F}_{2^{2(2s+1)}}$ from cyclotomy, Finite Fields and Their Applications, 査読有、25巻、2014、280 - 292、DOI:10.1016/j.ffa.2013.10.006

Koji Momihara, Inequivalence of skew Hadamard difference sets and triple intersection numbers modulo a prime, Electronic Journal of Combinatorics, 査読有、20巻、2013、19頁、<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v20i4p35/pdf>

Tao Feng, Koji Momihara, Evaluation of the weight distribution of a class of cyclic codes based on index 2 Gauss sums, IEEE Transactions on Information Theory, 査読有、59巻、2013、5980-5984、DOI: 10.1109/TIT.2013.2259538

Tao Feng, Koji Momihara, Three-class association schemes from cyclotomy, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 査読有、120巻、2013、1202-1215、DOI:10.1016/j.jcta.2013.03.002

Koji Momihara, Skew Hadamard difference sets from cyclotomic strongly regular graphs, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 査読有, 27巻, 2013, 1112 - 1122, DOI:10.1137/120888788

初原幸二, Three valued Gauss periods and related designs and association schemes, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1965巻, 2015, 135-149, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/okyuroku/contents/pdf/1965-16.pdf>

初原幸二, Inequivalence of skew Hadamard difference sets, Proceedings of Algebra and Computation 2013, 査読無, 2013, 9 - 23, http://tnt.math.se.tmu.ac.jp/ac/2013/proceedings/ac2013_proceedings.pdf

[学会発表](計 11 件)

Koji Momihara, New hemisystems of the Hermitian surface and related association schemes, The 4th Japan-Taiwan Conference on Combinatorics and its Applications, 2016年3月6日, 北九州国際会議場 (福岡)

Koji Momihara, New hemisystems and related 4-class association schemes, Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, 2016年1月30日, Pusan National University (大韓民国)

初原幸二, New hemisystems of the Hermitian surface, 研究集会「実験計画法と符号および関連する組合せ構造2015」、2015年12月2日, 箱根水明荘 (神奈川)

Koji Momihara, Skew Hadamard difference sets: Constructions and Inequivalence, International Workshop on Algebraic Combinatorics at Zhejiang University, 2015年9月21日, Zhejiang University (中華人民共和国)

Koji Momihara, Distance sets on circles, Systems of Lines: Applications

of Algebraic Combinatorics, 2015年8月11日, Worcester Polytechnic Institute (アメリカ合衆国)

初原幸二, 古典的な指標和とそれに関連する組合せ論. 第11回組合せ論若手研究集会, 2015年3月4日, 慶應義塾大学(神奈川)

初原幸二, Three-valued Gauss periods and related designs and association schemes, RIMS研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」、2014年12月19日, 京都大学数理解析研究所(京都)

初原幸二, New projective two-intersection sets and related Hadamard difference sets, 研究集会「実験計画法および関連する組合せ構造 2014」、2014年12月15日, 城崎国際アートセンター(兵庫)

初原幸二, Cyclotomic schemes and related problems. 代数的組合せ論「夏の学校2014」、2014年6月16日, ホテルクレセント(宮城)

Koji Momihara, Inequivalence of skew Hadamard difference sets, The 3rd Taiwan-Japan Conference on Combinatorics and its Applications, 2014年3月21日, National Chiayi University (中華民国)

初原幸二, Skew Hadamard difference set の非同値性の問題について, 第10回「代数学と計算」研究集会, 2013年12月18日, 首都大学東京(山形)

初原幸二, skew Hadamard difference set とその非同値性について, 離散数学とその応用研究集会2013, 2013年8月8日, 山形市保健センター(山形)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]
出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:

国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

ホームページ等

<http://combin-math-kumamoto.jp/>

<http://www.educ.kumamoto-u.ac.jp/~momihara/>

6．研究組織

(1)研究代表者

初原 幸二 (MOMIHARA KOJI)

熊本大学・教育学部・准教授

研究者番号：70613305