

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 7 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800213

研究課題名(和文)トポロジカル量子相のアンダーソン転移における表面状態

研究課題名(英文)Surface states at Anderson transitions in topological phases

## 研究代表者

小布施 秀明 (Obuse, Hideaki)

北海道大学・工学(系)研究科(研究院)・助教

研究者番号：50415121

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：層状構造を持つ3次元弱いトポロジカル絶縁体における2次元表面状態は、層間の結合が均一な場合は不純物が存在しても局在しないが、不均質な結合がある場合、乱れが増加すると局在-非局在転移を生じ、そのユニバーサリティ・クラスは2次元symplecticクラスであることを明らかにした。また、2次元の量子ホール絶縁体転移におけるdescendant演算子のスケーリング次元を高精度に数値的に計算する手法を確立した。さらに、フロケットポロジカル相を誘起する時間発展演算子に対する対称性やトポロジカル数を定義し、1次元量子ウォークにおける表面状態の不純物に対する安定性をトポロジカル相の観点から明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We have found that two-dimensional surface states of the three dimensional weak topological insulator with a stacked structure remain delocalized irrespective strength of disorder if hoppings between layers are homogeneous. However, if the hoppings between layers induce dimerization effects, electric states of the surface states show a localized-delocalized transition at a certain strength of disorder, whose universality class belongs to the two-dimensional symplectic class. We have also developed an efficient method to numerically calculate the scaling dimension of descendant operators at the two-dimensional integer quantum Hall transition. Furthermore, we have developed systematic procedures to identify symmetry and calculate topological numbers of time-evolution operators which could exhibit Floquet-topological phases. We have succeeded to explain the robustness of surface states of the one-dimensional quantum walk against disorder by using arguments of topological phases.

研究分野：物性理論

キーワード：トポロジカル相 アンダーソン転移 量子ウォーク

## 1. 研究開始当初の背景

トポロジカル数で特徴付けられる絶縁体・超伝導体のトポロジカル量子相に関する研究は現在、物性物理学において盛んに研究されている。トポロジカル量子相とアンダーソン転移の研究は密接に結びついており、近年のトポロジカル量子相に関する研究分野の進展において、アンダーソン転移の研究は大きく寄与してきた。このことは、アンダーソン転移において基本的対称性の有無により区別される 10 個のユニバーサリティ・クラスが、トポロジカル量子相の有無の分類にも用いられていることから明らかである[引用文献 1]。トポロジカル量子相に関して基礎学問・応用研究として最も重要な性質の一つに、有限のトポロジカル数を持つ系では系の境界に必ずエッジ状態が現れる性質(バルク・エッジ対応)がある。よく知られているように、2 次元系の整数量子ホール効果や量子スピンホール効果では、系の境界に 1 次元的なエッジ(表面)状態が現れる。このような表面状態はトポロジカルに安定であるため、系に不純物が存在する場合、バルクの電子状態は局在しても表面状態は局在せず、そのままに保たれる。近年のトポロジカル量子相に関する研究により、トポロジカル量子相は任意の空間次元に存在することが明らかとなり、バルクの空間次元が  $n$  次元のトポロジカル量子相に対し、 $n-1$  次元の境界が存在すると、その境界の周りに表面状態が生じることが分かった。

研究代表者は、以前の研究[引用文献 2]で、2 次元系の  $Z_2$  トポロジカル絶縁体である量子スピンホール系(class AII)を記述するネットワークモデルを構築し、トポロジカル絶縁相から金属相にアンダーソン転移する時、系の境界近傍の波動関数の臨界的振る舞い(境界臨界性)が、表面状態の有無に依存することを明らかにした。これはトポロジカル絶縁相の表面状態が系の臨界的性質に強く影響することを示している。さらに、 $Z$  トポロジカル超伝導体であるスピン量子ホール系(class C)に関する研究[引用文献 3]では、境界臨界性が表面状態の数、すなわちトポロジカル数、に依存することを明らかにした。また、ループモデルと呼ばれる統計的な格子モデルに対し共形場理論を用いることにより、スピン量子ホール境界臨界性の表面状態依存性を解析的に導いた。これまでのアンダーソン転移の研究分野において境界臨界性が厳密に解けたのは初めてである。このように、表面状態の境界条件依存性を調べることは、未だその相転移を記述する理論が明らかでないアンダーソン転移においても重要である。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、(1)様々な対称性、(2)様々なバルクの空間次元、(3)様々な境界条件またはトポロジカル欠陥が存在する系におけるトポロジカル量子相の表面状態について調

べることである。特に、トポロジカル量子相から他の相へのアンダーソン転移における表面状態の臨界的性質を系統的に調べることにより、トポロジカル量子相についての基礎的、及び応用的理解を深めると共に、アンダーソン転移を記述する理論自体の発展も目指す。

## 3. 研究の方法

### (1)3 次元の弱いトポロジカル絶縁体の 2 次元表面状態

トポロジカル量子相は、強い又は弱いトポロジカル量子相に分けられる。通常のトポロジカル量子相とは強いトポロジカル量子相を意味し、系の全ての方向に対して有限のトポロジカル数で特徴付けられる。一方、弱いトポロジカル量子相とは、系の特定の方向に対して有限のトポロジカル数を有する状態であり、具体的にはトポロジカル量子相を有する 2 次元を 1 軸方向に積み重ねた異方性の強い系である。この弱いトポロジカル量子相の表面状態は乱れに対し不安定であると考えられていたが、3 次元の弱いトポロジカル量子相の 2 次元表面状態は、乱れがあっても、局在しないという結果が報告された[引用文献 4]。現実の 3 次元の弱いトポロジカル絶縁体は、2 次元(強い)トポロジカル絶縁体の積層物であることが多いため、異方性が強い物質であると考えられる。しかし、以前の研究では系の異方性の寄与は考えられていない。異方性が強い場合も局在しないのかは自明でない。そこで研究代表者が以前 2 次元の量子スピンホール系を記述する有効モデルである  $Z_2$  ネットワーク・モデル[引用文献 2]を拡張し、3 次元の弱いトポロジカル量子相の 2 次元表面状態を記述するネットワーク・モデルを構築し、異方性と乱れの寄与を調べる。以下に、研究手法の詳細を示す。

数値計算：

1.  $Z_2$  ネットワークモデルを拡張し、3 次元 symplectic class(class AII)系の弱いトポロジカル量子相の表面状態を記述するネットワークモデルを新たに構築する。
2. このネットワークモデルの Lyapunov 指数の乱れの強さ・異方性依存性を、転送行列方を用い、数値的に調べる。
3. 有限サイズスケール解析を行うことにより、表面状態が乱れに対し安定か否か明らかにする。

解析計算：

弱いトポロジカル量子相に対するネットワークモデルの連続極限を考えることにより、有効ハミルトニアンを導出する。得られたハミルトニアンと以前の研究で用いられたハミルトニアンと比較することにより、異方性がどのように特徴付けられているのかを明らかにする。

## (2)2 次元のトポロジカル絶縁体の 1 次元表面状態

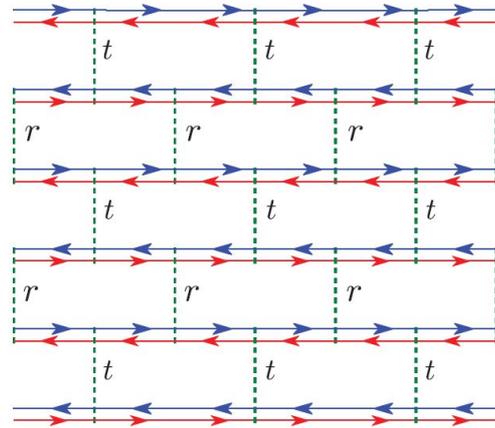
以前の研究代表者の研究[引用文献 2]により、トポロジカル量子相におけるアンダーソン転移では境界臨界性がトポロジカル数に依存することが明らかとなり、さらにスピン量子ホール効果(class C)に対しては共形場理論を用いることにより境界臨界性より得られるスケーリング次元を解析的に導くことができた。しかしながら、高次のスケーリング補正である descendant 演算子のスケーリング次元については、厳密な導出はできていない。さらに、他のユニバーサリティ・クラスに属するトポロジカル量子相については、解析的にはほとんど明らかになっていない。そこで、本研究では、量子ホール系(Class A)において、スケーリング補正項として現れる descendant 演算子のスケーリング次元を irrelevant なスケーリング次元の寄与を取り除くことにより、数値的に高精度に計算する手法の確立を行う。そのために、ポイント・コンタクト・コンダクタンスを数値的に計算し、Legendre 関数を用い irrelevant なスケーリング次元の影響を受けない統計量を計算する。さらにその統計量に対してスケーリング解析を行うことにより、primary 演算子と descendant 演算子のスケーリング次元を得る。

## (3)1 次元のトポロジカル量子相の 0 次元表面状態

量子ウォークとは、古典極限においてランダムウォークとなるような量子状態の時間発展現象である。この現象は量子計算・量子情報へ応用でき、近年冷却原子・トラップされたイオン・フォトンなどの実験が可能になり、急速に関心が高まっている。さらに、量子ウォークの時間発展演算子から得られる有効ハミルトニアン対称性を調べることにより、トポロジカル量子相の存在が明らかにされ、実験的にエッジ状態の実空間観測が行われた[引用文献 5]。1次元エッジ状態の実空間観測は通常物質では困難であるため、トポロジカル量子相の研究全般においても量子ウォークは重要な系であると考えられる。

研究代表者は、以前の研究で1次元の量子ウォークでは、実際の実験では無視できない外部からの乱れの寄与について研究を行い、実験が行われている多くの量子ウォークはカイラル対称性か粒子-ホール対称性を有しているため、1次元系でも特定のエネルギーに非局在状態が存在することを明らかにした。さらに、カイラル対称性か粒子-ホール対称性を有する1次元量子ウォークは、トポロジカル相を持ちうる。そこで、カイラル対称性を有する1次元量子ウォークのエッジ状態に対する、空間的または時間的な乱れの寄与についても調べた[引用文献 6]。本研究では、この研究を進展させ、有効ハミルトニ

(a)



(b)

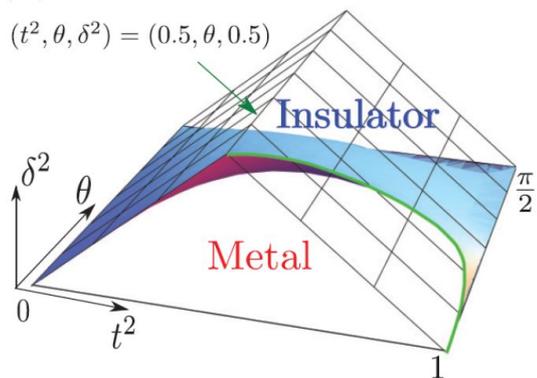


図 1: (a) 3次元弱い絶縁体の表面状態を記述する spin-directed network model.

(b) 3次元パラメータ空間における金属-絶縁体転移の相図。  $t^2$ ,  $\theta$ ,  $\delta^2$  は、それぞれ、層間の二量体効果の強さ、層間ホッピングの強さ、スピン-軌道相互作用の強さを表す。

アンを用いずに、時間発展演算子から直接対称性やトポロジカル相の議論を行う。そこで、まずは、時間発展演算子に対する時間反転対称性、粒子-ホール対称性、カイラル対称性の定義を与え、さらに適切なトポロジカル数を計算する手法の確立を行う。

## 4. 研究成果

### (1)3 次元の弱いトポロジカル絶縁体の 2 次元表面状態

2次元の強いトポロジカル絶縁体の積層物である、3次元弱いトポロジカル絶縁体の2次元表面状態を記述する有効モデルとして、spin-directed network model を構築した[図 1(a)]。このモデルは、乱れの寄与に加え、隣り合う層間の不均一な結合を起源とする二量体化の寄与を扱うことに適している。こ

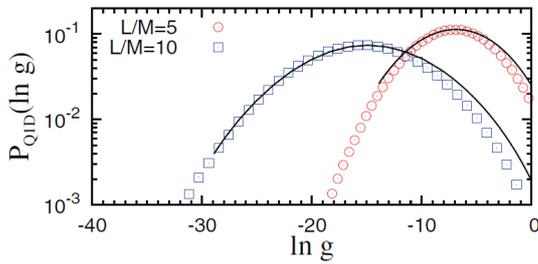


図 2: 量子ホール転移点におけるコンダクタンス分布(、)とスケーリング次元から予想されるコンダクタンス分布(実線)の比較。

のモデルを、解析的に調べることにより、ある極限においては過去の研究で量子ホール絶縁体に対して提案された directed ネットワークモデルとの関係が付き、理論的に相図の概略を導くことができた。更に、数値計算による検証を行い、二量体化がない場合は、表面状態は、不純物効果があっても、常に金属として振る舞うことを確かめた。さらに、二量体化の寄与が有限の場合、表面状態は金属相から絶縁相へ転移し、この転移はアンダーソン転移の 2 次元 symplectic ユニバーサリティ・クラスに属することを示した[図 1(b)]。

### (2)2 次元のトポロジカル絶縁体の 1 次元表面状態

量子ホール絶縁体に対するアンダーソン転移におけるコンダクタンスの臨界的性質に関する研究を行い、Legendre 関数を用いることにより、ポイント・コンタクト・コンダクタンスを、スケーリング補正のないスケーリング演算子と関係付けられることを示した。その結果、従来より精度の高いスケーリング次元の数値解析が可能になることを実証した。また、コンダクタンス分布とスケーリング次元が関係づけられることを示した(図 2)。この手法により、今後 descendant 演算子のスケーリング次元をより詳細に計算できると考えられる。

### (3)1 次元のトポロジカル量子相の 0 次元表面状態

1 次元量子ウォークの時間発展演算子における各種対称性を定義するために必要な対称性演算子を場所に依存しないように定義するには、時間発展演算子の時間の原点をシフトする必要があることを示した。この対称性が明確になる時間を対称時間軸と呼び、この考えを用いることにより、量子ウォークのみならず他の時間発展演算子で記述される系においても対称性を明確に定義できるようになった。

さらに、カイラル対称性を有する量子ウォークのトポロジカル数について研究を行っ

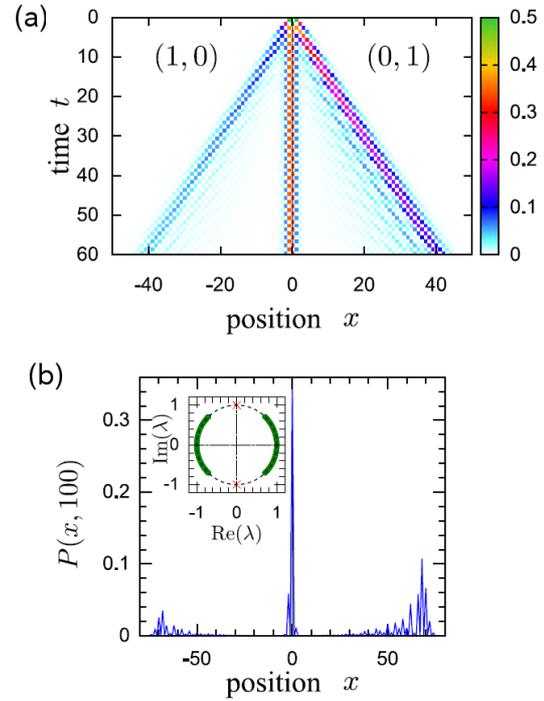


図 3: (a) 1 次元アダマールウォークにおける確率分布の時間発展の様子。x=0 にトポロジカル数に変化する境界がある。(b) t=60 における確率分布。Inset:固有値分布。

た。時間発展演算子により記述される系のエネルギーは、擬エネルギーと呼ばれ 2 周期性を有する。このことを反映し、カイラル対称性を有する 1 次元量子ウォークではエッジ状態がゼロ・エネルギーに加え、エネルギーにも表れる。本研究では、バルク-境界対応を利用することにより、カイラル対称性を有する多重ステップ量子ウォークの 2 つの時間発展演算子から、擬エネルギーがゼロにおけるトポロジカル数を計算する方法を確立した。

さらに 1 次元系量子ウォークにおける表面状態はすでに実験的に観測されているが、従来の理論ではトポロジカルに自明なパラメータ領域でも表面状態が観測され、問題になっていた。我々は、実験で用いられた系を正確に取り扱うことにより、正しいトポロジカル数を導出し、実験結果を正しく説明する理論結果を得た(図 3)。

また、1 次元系では、トポロジカル数に変化する境界で指数関数的に減衰する表面状態が生じる。カイラル対称性を有する 1 次元系量子ウォークの量子エンタングルメントを定量的に表す Negativity を調べた結果、表面状態が存在する時、Negativity が非常に小さくなることが分かった。さらに、表面状態はカイラル対称性の固有状態であることを反映し、この表面状態はビット反転ノイズに対して、安定であることが分かった。

さらに、トポロジカル数が空間的に変化する

る 2 相系量子ウォークにおけるトポロジカル数と時間平均極限測度に関する研究も行った。その結果、系に欠陥に導入しても、2 相系量子ウォークの表面状態の固有値が不変であることをトポロジカル相により説明できた。

#### <引用文献>

[1]A.P.Schnyder, S.Ryu, A.Furusaki, and A.W.W.Ludwig; Phys.Rev.B 78, 195125(2008).

[2]H.Obuse, A.Furusaki, S.Ryu, and C.Mudry; Phys.Rev.B 78, 115301 (2008).

[3]B.Bondesan, I.A.Gruzberg, J.L.Jacobsen, H.Obuse, H.Saleur; Phys. Rev. Lett. 108, 126801 (2012).

[4]R.S.K.Mong, J.H.Bardarson, and J.E.Moore; Phys. Rev. Lett. 108, 076804 (2012).

[5]T.Katagawa, M.A.Broome, A.Fedrizzi, et al. Nature Communications 3, 882 (2012).

[6]H.Obuse and N.Kawakami; Phys. Rev. B 84, 195139 (2011).

#### 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Hideaki Obuse, Janos K. Asboth, Yuki Nishimura, Norio Kawakami, "Unveiling hidden topological phases of a one-dimensional Hadamard quantum walk", Physical Review B, Vol. **92**, 045424-1-10, 2015, 査読有  
DOI : 10.1103/PhysRevB.92.045424

小布施秀明, "アンダーソン局在における臨界現象 --最近の実験・理論の新展開--", 日本物理学会誌, Vol.**70**, 14-24, 2015, 査読有

Hideaki Obuse, Shinsei Ryu, Akira Furusaki, Christopher Mudry, "Spin-directed network model for the surface states of weak three-dimensional  $Z_2$  topological insulators", Physical Review B (Editors' suggestion), Vol. **89**, 155315-1-28, 2014, 査読有  
DOI : 10.1103/PhysRevB.89.155315

Janos K. Asboth, Hideaki Obuse, "Bulk-Boundary Correspondence for Chiral Symmetric Quantum Walks", Physical Review B (Rapid Communications), Vol. **88**, 121406-1-5, 2013, 査読有  
DOI : 10.1103/PhysRevB.88.121406

Hideaki Obuse, Soumya Bera, Andreas W. W. Ludwig, Ilya A. Gruzberg, Ferdinand Evers,

"Statistics of Conductances and Subleading Corrections to Scaling near the Integer Quantum Hall Plateau Transition", Europhysics Letters (Editor's Choice), Vol. **104**, 27014-1-6, 2013, 査読有

DOI : 10.1209/0295-5075/104/27014

[学会発表](計 20 件)

小布施秀明, "1次元単一欠陥付き Hadamard 量子ウォークの局在化とトポロジカル相", 日本物理学会 第 71 回年次大会, 2016 年 03 月 19 日~2016 年 03 月 22 日, 東北学院大学(宮城県・仙台市)

(招待講演)Hideaki Obuse, "Topological phases of a  $PT$  symmetric non-unitary quantum walk", Mathematical Association of America (MAA) and American Mathematical Society (AMS) Joint Mathematics Meetings, 2016 年 1 月 6 日~2016 年 01 月 09 日, Seattle(USA).

小布施秀明, "Floquet Topological Phases of Quantum Walks", 第 1 回「トポロジジーが紡ぐ物質科学のフロンティア」領域研究会, 2015 年 12 月 11 日~2015 年 12 月 13 日, 京都大学(京都府・京都市)

Hideaki Obuse, "Topological phases of one-dimensional Hadamard walks and non-unitary quantum walks", Workshop of Quantum Simulation and Quantum Walks 2015, 2015 年 11 月 15 日~2015 年 11 月 18 日, 横浜国立大学(神奈川県・横浜市)

Ken Mochizuki, Dakyeong Kim, Hideaki Obuse, "Topological phases and enhancement of edge states in  $PT$  symmetric quantum walks with gain and loss", Workshop of Quantum Simulation and Quantum Walks 2015, 2015 年 11 月 15 日~2015 年 11 月 18 日, 横浜国立大学(神奈川県・横浜市)

Takako Endo, Norio Konno, Hideaki Obuse, "Relation between two-phase quantum walks and the topological invariant", Workshop of Quantum Simulation and Quantum Walks 2015, 2015 年 11 月 15 日~2015 年 11 月 18 日, 横浜国立大学(神奈川県・横浜市)

金多景, 望月健, 小布施秀明, "非ユニタリー量子ウォークにおける  $PT$  対称性とトポロジカル相", 日本物理学会 2015 年秋季大会, 2015 年 09 月 16 日~2015 年 09 月 19 日, 関西大学(大阪府・大阪市)

望月健, 金多景, 小布施秀明, "境界のある非ユニタリー量子ウォークにおける  $PT$  対称性とエッジ状態の増幅", 日本物理学会 2015 年秋季大会, 2015 年 09 月 16 日~2015 年 09 月 19 日, 関西大学(大阪府・大阪市)

遠藤隆子, 今野紀雄, 小布施秀明, "2 相系量子ウォークの漸近的振舞とトポロジカル絶縁体の数理", 日本物理学会 2015 年秋季大会, 2015 年 09 月 16 日~2015 年 09 月 19 日, 関西大学(大阪府・大阪市)

(招待講演)小布施秀明, "量子ウォークとトポロジカル絶縁体の邂逅", 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015 年 09 月 13 日~2015 年 09 月 16 日, 京都産業大学(京都府・京都市).

遠藤隆子, 今野紀雄, 小布施秀明, "2 相系量子ウォークの漸近的振舞とトポロジカル絶縁体の数理", 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015 年 09 月 13 日~2015 年 09 月 16 日, 京都産業大学(京都府・京都市).

小布施秀明, Janos K. Asboth, 西村勇希, 川上則雄, "1 次元フォトリック量子ウォークにおける隠れたトポロジカル相の解明", 日本物理学会 第 70 回年次大会, 2015 年 03 月 21 日~2015 年 03 月 24 日, 早稲田大学(東京都・新宿区)

(招待講演)小布施秀明, "量子ウォークにおけるトポロジカルな局在状態の制御", 量子系の数理と物質制御への展開:量子ウォークを架け橋に, 2014 年 09 月 17 日~2014 年 09 月 18 日 東北大学(宮城県・仙台市)

小布施秀明, 笠真生, 古崎昭, Christopher Mudry, "弱い 3 次元トポロジカル絶縁体の表面状態: 奇数チャネル及び, trimerization の寄与", 日本物理学会 2014 年秋季大会, 2014 年 09 月 07 日~2014 年 09 月 10 日, 中部大学(愛知県・名古屋市)

小布施秀明, 笠真生, 古崎昭, Christopher Mudry, "弱い 3 次元トポロジカル絶縁体の表面状態における局在 非局在転移", 日本物理学会 第 69 回年次大会, 2014 年 03 月 27 日~2014 年 03 月 30 日, 東海大学(神奈川県・平塚市)

(招待講演)Hideaki Obuse, "*Finite-size effects and irrelevant corrections to scaling near the integer quantum hall transition*", Recent Progress and Perspectives in Scaling, Multifractality, Interactions, and Topological Effects Near Anderson Transitions, 2014 年 03 月 11 日~2014 年 03 月 14 日, Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems (Germany)

小布施秀明, Janos K. Asboth, "多重ステップ量子ウォークのカイラル対称性とバルク境界対応", 日本物理学会 2013 年秋季大会, 2013 年 09 月 25 日~2013 年 09 月 28 日, 徳島大学(徳島県・徳島市)

西村勇希, 小布施秀明, 川上則雄, "単一ステップ量子ウォークにおけるマヨラナ・ゼロモード", 日本物理学会 2013 年秋季大会, 2013 年 09 月 25 日~2013 年 09 月 28 日, 徳島大学(徳島県・徳島市)

Hideaki Obuse, "*Anderson transition at three-dimensional weak Z<sub>2</sub> topological insulators*", Topology and Nonequilibrium in Low-Dimensional Electronic Systems, 2013 年 09 月 16 日~2013 年 09 月 20 日, Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems (Germany)

Hideaki Obuse, "*Topological phases and delocalization of quantum walks in random environments*", Advances in Quantum Chaotic Scattering: From (Non-)Linear Waves to Few-Body Systems, 2013 年 09 月 09 日~2013 年 09 月 13 日, Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems (Germany)  
〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ等  
<https://sites.google.com/site/hideakiobuse>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小布施 秀明 (OBUSE, Hideaki)  
北海道大学・大学院工学研究院・助教  
研究者番号: 50415121